Изданіе Института Инженеровъ Путей Сообщенія ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I.

СБОРНИКЪ ЗАДАЧЪ

ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКѢ

преподавателей Института Инженеровъ Путей Сообщенія

А. А. Адамова, А. П. Вилижанина, И. М. Гюнтера, А. Н. Захарова, В. М. Меліоранскаго, В. Ф. Точискаго и Я. В. Успенскаго.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія Ю. Н. Эрлихъ (влад. А. Э. Коллинсъ), М. Дворянская, 19.

1912.

ГОС. ПУБЛИЧНАЯ
НАУЧНО-ТЕХ. БИБЛИОТЕКА
БИБЛИОТЕКА СССР

3627 $\frac{14}{65}$

$\frac{Ж}{7486}$

Предисловіе.

Издавая свой сборникъ составители задавались двоякою цѣлью. Съ одной стороны они хотѣли дать студентамъ такое пособіе, которое могло-бы удовлетворить учащихся при прохожденіи всѣхъ отдѣловъ Высшей Математики, читаемыхъ въ Высшихъ Техническихъ Учебныхъ заведеніяхъ; съ другой стороны надѣялись облегчить трудъ преподавателя, поставленнаго въ необходимость непрерывно въ теченіе года выискивать или составлять новыя задачи для письменныхъ упражненій студентовъ.

Преслѣдуя указанныя двѣ цѣли составители стремились развить равномѣрно всѣ отдѣлы Высшей Математики. Вслѣдствіе этого составителями включены на одинаковыхъ основаніяхъ съ остальнымъ матерьяломъ сравнительно мало разработанные въ распространенныхъ въ настоящее время задачникахъ главы объ изслѣдованіи алгебраическихъ кривыхъ (въ отдѣлѣ V), о кратныхъ интегралахъ (отд. VIII), о рядахъ, (съ рядами Фурье, отд. XI) и о приближенныхъ вычисленіяхъ (отд. XII). Отдѣлъ VI и конецъ отдѣла IX-го разработаны менѣе остальныхъ соотвѣтственно положенію, которое занимаютъ высшая алгебра и глава объ интегрированіи уравненій въ частныхъ производныхъ въ Высшихъ Техническихъ Учебныхъ Заведеніяхъ.

Для достиженія первой цѣли составители старались иллюстрировать отдѣльные вопросы задачами различной трудности. Каждый подъотдѣлъ 12-ти отдѣловъ задачника начинается съ легкихъ задачъ и многіе подъотдѣлы кончаются

задачами, доступными лишь для студентовъ, выдающихся своими знаніями надъ среднимъ уровнемъ.

Составители надѣялись, что благодаря большому количеству задачъ Сборникъ удовлетворитъ и своей второй цѣли. Имѣя, между прочимъ, въ виду 2-ую цѣль, составители ограничились указаніемъ отвѣтовъ на задачи Сборника, нигдѣ не проводя рѣшеній задачъ и ограничиваясь въ рѣдкихъ случаяхъ указаніями въ текстѣ задачи или въ формулировкѣ отвѣта.

Въ началѣ предполагалось издать Сборникъ приблизительно въ 1500 задачъ, использовавъ задачи, предложенныя на занятіяхъ студентамъ въ прошлые годы и распредѣливъ трудъ доставленія задачъ поровну между участниками. Но благодаря тому, что число представленныхъ отдѣльными лицами задачъ значительно превзошло намѣченную норму, число задачъ въ Сборникѣ достигло 3539, а также нарушилось равенство участниковъ въ составленіи Сборника.

Изъ задачъ, помѣщенныхъ въ Сборникѣ доставлены, приблизительно,

А. А. Адамовымъ	200
А. П. Вилижаниным ъ . . .	400
Н. М. Гюнтеромъ.	700
А. Н. Захаровымъ	250
В. М. Меліоранскимъ	150
В. Ф. Точискимъ	300
Я. В. Успенскимъ	1500

Составители избѣгали заимствованій изъ распространенныхъ нынѣ Сборниковъ задачъ; но эти Сборники имѣли большое вліяніе на выборъ задачъ.

Почти всѣ задачи, исключая наиболѣе легкихъ, рѣшены двумя лицами. Задачи, предложенныя отдѣльными лицами, относились почти всегда ко всѣмъ 12 отдѣламъ Сборника. Редактированіе-же отдѣловъ было распредѣлено слѣдующимъ образомъ:

Отдѣлъ I и II редактировали А. Н. Захаровъ и Н. М. Гюнтеръ.

Отдѣлъ III и IV редактировалъ	Н. М. Гюнтеръ.
Отдѣлъ V „	А. П. Вилижанинъ.
Отдѣлъ VI редактировали	В. М. Меліоранскій и Н. М. Гюнтеръ.
Отдѣлъ VII редактировалъ	В. Ф. Точискій.
Отдѣлъ VIII „	А. А. Адамовъ.
Отдѣлы IX, X, XI и XII „	Я. В. Успенскій.

Въ просмотрѣ корректуръ принимали участіе А. П. Вилижанинъ, Н. М. Гюнтеръ, А. Н. Захаровъ, В. Ф. Точискій и Я. В. Успенскій.

Кромѣ того значительную помощь при просмотрѣ корректуръ оказали преподаватели Института Инженеровъ Путей Сообщенія Я. Д. Тамаркинъ и А. А. Фридманъ.

Составители приносятъ глубокую благодарность Совѣту Института Инженеровъ Путей Сообщенія, взявшему на себя изданіе Сборника.

Составители.

Оглавленіе.

стр.

I. Аналитическая геометрія на плоскости.

Задачи на примѣненіе первоначальныхъ формулъ (1—23) 1
Прямая линія (24—97) 2
Геометрическія мѣста (98—142) 5
Линія 2-го порядка. Общее изслѣдованіе (143—159) 8
Центръ и діаметры (160—180) 9
Приведеніе къ простѣйшему виду уравненій (181—224) 9
Задачи на кривыя 2-го порядка, заданныя уравненіями въ каноническомъ видѣ (225—250) 10
Розысканіе фокусовъ и директрисъ (251—287) 11
Касательныя къ кривымъ 2-го порядка (288—364) 13

II. Аналитическая геометрія въ пространствѣ.

Координаты (1—15) 18
Плоскость (16—43) 18
Прямая линія (44—74) 20
Образованіе поверхностей (75—118) 21
Поверхности 2-го порядка. Центръ, діаметральныя плоскости и т. д. (119—161) 23
Упрощеніе уравненій поверхностей 2-го порядка (162—216) 25
Круговыя сѣченія поверхностей 2-го порядка, прямолинейныя образующія и т. д. (217—267) 27

III. Дифференціальное исчисленіе.

Теорія предѣловъ (1—91) 30
Введеніе въ дифференціальное исчисленіе (92—114) 34
Дифференцированіе функцій одной перемѣнной независимой (115—176) 35
Дифференцированіе функцій, заданныхъ параметрически (177—189) . 37
Производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ функцій одной перемѣнной независимой (190—228) 38
Дифференцированіе функцій многихъ перемѣнныхъ (229—263) . . . 39
Дифференцированіе неявныхъ функцій (264—296) 41
Замѣна перемѣнныхъ (297—343) 42

IV. Приложенія дифференціальнаго исчисленія къ анализу.

Ряды (1—51) 46
Раскрытіе неопредѣленностей (52—116) 47
Основные примѣры на maximum и minimum функцій отъ одной перемѣнной (117—137) 49
Построеніе графиковъ функцій (138—203) 50
Разныя задачи на maxima и minima (204—288) 52
Maxima и minima функцій отъ многихъ перемѣнныхъ независимыхъ (289—601) 56
Относительные maxima и minima (302—353) 56

V. Геометрическія приложенія дифференціальнаго исчисленія.

Плоскія кривыя. стр.

Нахожденіе уравненій кривыхъ по заданнымъ геометрическимъ условіямъ (1—11) 5
Касательныя и нормали (12—59) 6
Кривизна и радіусъ кривизны (60—83) 6
Эволюты (84—93) 6
Огибающія кривыя (94—120) 6

Построеніе кривыхъ.

Опредѣленіе направленія вогнутости кривой въ данной точкѣ, вершинъ и точекъ перегиба (121—135) 6
Изслѣдованіе особенныхъ точекъ (136—151) 6
Изслѣдованіе безконечныхъ вѣтвей (152—160) 6
Замкнутыя кривыя (161—176) 6
Кривыя съ параболическими вѣтвями (177—186) 6
Кривыя съ гиперболическими вѣтвями (187—219) 6
Кривыя съ различными безконечными вѣтвями (220—223) . . 6
Кривыя, заданныя параметрически (224—235) 6
Построеніе кривыхъ, заданныхъ геометрическими условіями ихъ образованія (236—250) 6

Кривыя двоякой кривизны.

Касательная прямая и нормальная плоскость (251—267) . . . 6
Соприкасающаяся плоскость (268—272) 6
Нормаль и бинормаль (273—279) 6
1-ая и 2-ая кривизна (280—290) 6

Поверхности:

Касательная плоскость и нормаль (291—321) 6
Поверхности цилиндрическія, коническія и поверхности вращенія (322—333) 7
Огибающія поверхности (334—342) 7
Кривизна поверхностей (343—350) 7

VI. Высшая алгебра.

Вычисленіе опредѣлителей (1—16) 7
Теорія комплексныхъ чиселъ (17—49) 7
Разложеніе дробей на простѣйшія (50—66) 74
Уравненія 3-й степени (67—75) 74
Нахожденіе раціональныхъ и кратныхъ корней (76—98) 74
Отдѣленіе и вычисленіе корней (99—130) 75
Задачи разнаго характера (131—178) . . . . . 75—78

VII. Интегрированіе функцій.

Введеніе: простѣйшіе опредѣленные интегралы (1—25) . . . . . 79—80
Интегрированіе раціональныхъ функцій (26—66) 80
Интегрированіе ирраціональныхъ функцій (67—119) . . . . . 81—82
Интегрированіе трансцендентныхъ функцій (120—175) . . . . . 82—83
Интегрированіе гиперболическихъ функцій (176—192) 83
Простѣйшія приложенія интегральнаго исчисленія къ геометріи.
Вычисленіе площадей (193—232) . . . . . 83—85
Вычисленіе длины дуги (233—253) 85
Вычисленіе объемовъ (254—294) . . . . . 88—89
Вычисленіе поверхностей (295—315) . . . . . 85—88

VIII. Кратные интегралы.

а) Двойные интегралы.

Вычисленіе площадей (1—40) . . . . . 90—91
Вычисленіе объемовъ (41—130) . . . . . 91—93

стр.

Моменты инерціи и центры инерціи плоскихъ фигуръ (131—145). 93
Перемѣна порядка интегрированія и преобразованіе двойныхъ интеграловъ (146—149) 93
Вычисленіе поверхностей (150—183) . . . . . 93—94
Моменты инерціи и центры инерціи поверхностей (184—191). 94—95
Вычисленіе нѣкоторыхъ двойныхъ интеграловъ (192—193) . . 95

в) Тройные интегралы.

Вычисленіе объемовъ (194—277) . . . . . 95—97
Моменты инерціи и центры инерціи объемовъ (278—303) . . 97—98

IX. Интегрированіе уравненій.

Нахожденіе функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ по полнымъ ихъ дифференціаламъ (1—12) 99
Уравненія, лѣвая часть которыхъ есть полный дифференціалъ (13—20) . . . . . 99—100
Уравненія съ отдѣляющимися перемѣнными (21—30) 100
Уравненія линейныя и приводящіяся къ линейнымъ (31—76) . . 100—101
Уравненія однородныя и приводящіяся къ однороднымъ (77—113) . 101—102
Уравненія Дарбу и Якоби (114—128) 102
Интегрирующій множитель (129—148) 102
Уравненія Эйлера (149—158) . . . . . 102—103
Уравненія 1-го порядка, не рѣшенныя относительно y' (159—224) . 103—104
Особенныя рѣшенія (225—236) 104
Уравненія высшихъ порядковъ, допускающія пониженіе порядка (237—282) . . . . . 104—105
Линейныя уравненія высшихъ порядковъ (283—348) . . . . . 105—107
Системы дифференціальныхъ уравненій (349—390) . . . . . 107—109
Линейныя уравненія перваго порядка съ частными производными (391—425) . . . . . 109—110
Геометрическія приложенія дифференціальныхъ уравненій (426—514). 110—114

X. Опредѣленные интегралы.

Непосредственное вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ (1—18) . 115
Примѣненіе формулъ приведенія (19—42) . . . . . 116—117
Примѣненіе разложеній въ ряды подъинтегральной функціи (43—64). 117—118
Вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ при помощи преобразованія перемѣннаго (65—76) 118
Примѣненіе дифференцированія по параметру (77—116) . . . . . 118—120
Интегрированіе подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла (117—129) . 120—121
Эйлеровы интегралы (130—158) . . . . . 121—122
Разныя задачи (159—180) 123

XI. Ряды.

Изслѣдованіе сходимости рядовъ (1—36) . . . . . 124—125
Непосредственное суммированіе конечныхъ и безконечныхъ рядовъ (37—96) . . . . . 125—127
Суммированіе рядовъ съ помощью опредѣленныхъ интеграловъ (97—157) . . . . . 128—130
Опредѣленіе суммъ рядовъ съ помощью дифференцированія (158—172) 131
Тригонометрическіе ряды (173—198) . . . . . 132—133
Разныя задачи (199—245) . . . . . 133—136

XII. Приближенныя вычисленія.

Интерполированіе (1—20) . . . . . 137—140
Приближенное вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ (21—55) . . 140—141
Приложенія формулы Эйлера-Маклорена (56—68) . . . . . 141—142
Вычисленіе суммъ медленно сходящихся рядовъ (69—102) . . . . 142—146
Вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ съ помощью разложенія въ ряды (103—112) . . . . . 146—147
Рѣшеніе численныхъ уравненій (113—119) 147
Вычисленіе корней трансцендентныхъ уравненій (120—127) . . . . 147—148

Отвѣты.

стр.

Отдѣлъ I (1—364) . . . . . 149—156
Отдѣлъ II (1—267) . . . . . 157—165
Отдѣлъ III (1—343) . . . . . 166—175
Отдѣлъ IV (1—353) . . . . . 176—186
Отдѣлъ V (1—350) . . . . . 187—198
Отдѣлъ VI (1—176) . . . . . 199—202
Отдѣлъ VII (1—315) . . . . . 203—212
Отдѣлъ VIII (1—303) . . . . . 213—219
Отдѣлъ IX (1—514) . . . . . 220—233
Отдѣлъ X (1—180) . . . . . 234—238
Отдѣлъ XI (1—244) . . . . . 239—245
Отдѣлъ XII (1—127) . . . . . 246—250

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Лицъ, пользующихся Сборникомъ, просятъ исправить слѣдующія главнѣйшія опечатки:

Стр.	№ зад.	Напечатано:	Должно быть:
8	153	$(ax+by+c)^2-(a'x+b'y+c')=k^2$	$(ax+by+c)^2-(a'x+b'y+c')^2=k^2$
10	230	$x-3y2+=0$	$x-3y+2=0$
16	341	$x^2+y=r^2$	$x^2+y^2=r^2$
25	178	$3x^2+3y^2+6z^2+6yz-3x-y-4z+1=0$	$3x^2+3y^2+6z^2+6xy-3x-y-4z+1=0$
30	15	$\lim\limits_{x=\infty}\left\{x^3\sqrt{x^3+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right\}$	$\lim\limits_{x=\infty} x^3\left\{\sqrt{x^3+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right\}$
31	52	воспользовался	воспользоваться
31	57	$p\geqq 0$	$p\geqq 1$
34	85	возростаніи	возрастаніи
34	91	перемѣстнаго	перемѣннаго
34	94	$y=arc\,sin\,(sn\,x)$	$y=arc\,sin\,(sin\,x)$
34	102	$tg\left(\frac{\pi}{4}-m\varphi\right)=\frac{1+tg\,m\varphi}{1-tg\,m\varphi}$	$tg\left(\frac{\pi}{4}-m\varphi\right)=\frac{1-tg\,m\varphi}{1+tg\,m\varphi}$
35	113	неравенсто	неравенство
36	172	функцію	функціи
38	195	$U_m^{(n)}$	$U_m^{(k)}$
38	216	U_2 и U_1	U_{n+2} и U_n
38	220	$(1-x^2)p_n''+(2n-3)xp_n'-(n-1)^2p_n=0$	$(1-x^2)\,p_n''+(2n-3)\,xp_n'-(n-1)^2\,p_n=0$
39	226	$\lvert P_{2k}(x)\rvert<1.2.3\ldots 2k.(1+x^2)^{\frac{2k+1}{2}}$	$\lvert P_{2k}(x)\rvert<1.2.3\ldots 2k.(1+x^2)^{\frac{2k+1}{2}}$
39	228	$P_n(x)=(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{1-x^2})^n$	$P_n(x)=(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n$
40	252	$x^k\frac{\partial^k\varphi}{\partial x^k}+C_n'x_{k-1}y\frac{\partial^k\varphi}{\partial x_{k-1}\partial y}+$ $+C_n^2x_{k-2}y^2\frac{\partial^k\varphi}{\partial x_{k-2}\partial y^2}+\ldots+y^k\frac{\partial^k\varphi}{\partial y^k}$	$x^k\frac{\partial^k\varphi}{\partial x^k}+C_n^1x^{k-1}y\frac{\partial^k\varphi}{\partial x^{k-1}\partial y}+$ $+C_n^2x^{k-2}y^2\frac{\partial^k\varphi}{\partial x^{k-2}\partial y^2}+\ldots+y^k\frac{\partial^k\varphi}{\partial y^k}$
44	327	$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}$	$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=0$
44	329	$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$
47	42	Machu	Machin
48	87	$\frac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\frac{4}{x^4}$	$\frac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\frac{3}{x^4}$
58	352	$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
59	8	Кардіоды	Кардіоиды
61	48	$x^3+y^2-2x-6=0$	$x^3+y^2-2x-5=0$
65	124	при $\varphi\leqq\pm\frac{\pi}{6}$	при $-\frac{\pi}{6}\leqq\varphi\leqq+\frac{\pi}{6}$

Стр.	№ зад.	Напечатано:	Должно быть
77	160	(См. предыдущую задачу)	(См. задачу № 175)
81	90	$\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)}$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$
93	142	$\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}+\frac{x^2y}{c}$	$\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}-\frac{x^2y}{c^2}$
93	163	$\left\{1-\frac{y^2}{x}(x^2+y^2)\right\}y''-\frac{2yy'}{x}+\frac{y}{x^2}=0$	$\left\{1-\frac{y'}{x^2}(x^2+y'^2)\right\}y''-\frac{2yy'}{x}+\frac{y^2}{x^2}=0$
192	190	$\left(\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)$
		$\left(+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}\right)$	$\left(+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}}\right)$
195	253	$\begin{cases} \sqrt{p(p+q)}\,y = px + \frac{p(p+q)}{2} \\ \sqrt{q(p+q)}\,y = qx + \frac{q(p+q)}{2}. \end{cases}$	$\begin{cases} y\sqrt{p(p+q)} = px + \frac{p(p+q)}{2} \\ y\sqrt{q(p+q)} = qx + \frac{q(p+q)}{2} \end{cases}$

ОТДѢЛЪ I

Аналитическая геометрія на плоскости *).

Задачи на примѣненіе первоначальныхъ формулъ.

1. Найти разстояніе между точками M_1 (1,2), M_2 (2,1) и $\theta = 60^0$.

2. Найти геометрическое мѣсто точекъ равноудаленныхъ отъ точекъ $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

3. Найти ур—ніе окружности, центръ которой въ точкѣ M (1,1) и радіусъ 2. Уголъ между осями $\theta = 60^0$.

4. Провѣривъ, что кривая $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ окружность, найти ея центръ и радіусъ.

5. Найти уравненіе такой линіи, любая точка M которой удовлетворяетъ условію: $\frac{\text{дл. } MM_1}{\text{дл. } MM_2} = \frac{1}{2}$, при чемъ M_1 (1,0) и M_2 (0,1) и $\theta = 90^0$.

6. Раздѣлить отрѣзокъ AB, соединяющій точки A (6,4) и B (6,—9), въ отношеніи 1 : 3.

7. На прямой, проходящей черезъ точки A (6,4) и B (6,—9), найти точки C такія, что $\frac{\text{дл. } AC}{\text{дл. } CB} = \frac{7}{4}$.

8. Точки M_1 (1,1), M_2 (2,2), M_3 (3,1) суть три послѣдовательныя вершины параллелограмма. Найти четвертую вершину.

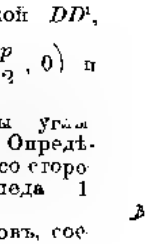
9. Написать уравненіе окружности, лежащей во второмъ углѣ прямоугольной системы и касающейся осей координатъ, если радіусъ $r = 1$.

10. Найти ур—ніе г. м. точекъ, отношенія разстояній которыхъ отъ точки $(ea, 0)$ и отъ прямой DD^1, проходящей черезъ точку $D\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ и параллельной оси OY, равны e. Оси прямоугольныя.

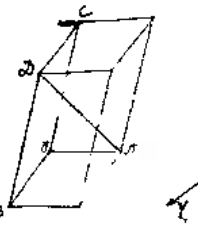
11. Найти г. м. точекъ равноудаленныхъ отъ точки $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и отъ прямой DD^1, проходящей черезъ точку $D\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и параллельной оси OY.

12. Въ параллелепипедѣ даны углы $AOB = 60^0$, $AOC = 120^0$ и $BOC = 120^0$. Опредѣлить длину діагонали AD и уголъ ея со стороной OC. Длина сторонъ параллелепипеда = 1 (Черт. 1).

13. Найти г. м. серединъ отрѣзковъ, соединяющихъ точки на окружности $x^2 + y^2 = 4$ съ началомъ координатъ. Доказать, что это окружность.



Черт. 1.



Черт. 2.

14. Составить формулы для перехода отъ системы координатъ XOY къ системѣ $X_1O_1Y_1$, гдѣ система XOY прямоугольная, O_1 (1,1) и ось O_1X_1 перпендикулярна къ оси OX (Черт. 2).

15. Составить формулы перехода отъ системы XOY къ системѣ $X_1O_1Y_1$, если

---

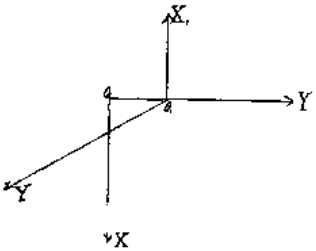
*) Въ задачахъ, гдѣ нѣтъ указаній на уголъ между осями координатъ, онъ считается прямымъ.

длина $OO_1 = 2$, оси OY и O_1X_1 перпендикулярны, а уголъ между осями OX и O_1Y_1 равенъ 60^0. (См черт. 3)

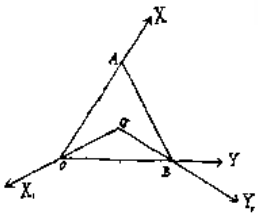
16. OAB равносторонній $\triangle$ къ, центръ котораго въ O и длина стороны a Составить формулы для перехода отъ осей XOY къ осямъ $X_1O_1Y_1$ и обратно (Черт. 4)

17. Дана линія $13x^2 + 7y^2 - 6\sqrt{3}xy + 6\sqrt{3}y - 26x + 9 = 0$ въ прямоугольныхъ координатахъ Найти ея уравненіе въ новыхъ координатахъ новое начало въ точкѣ $O_1(1,0)$ и новыя оси повернуты относительно старыхъ на 60^0 ($\theta = 90^0$).

18. Дана линія $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ въ прямоугольныхъ осяхъ. Найти ея уравненіе въ новыхъ осяхъ, принявъ за таковыя діагонали прямоугольника уравненія сторонъ котораго суть $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$.



Черт 3



Черт. 4

19. Та же задача для линіи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

20 Уравненіе линіи, отнесенной къ косоугольной системѣ координатъ съ угломъ $\theta = 45^0$, есть $xy\sqrt{2} = 1 - y^2$ Каково будетъ уравненіе этой линіи въ прямоугольной системѣ, если новое начало и новая ось абсциссъ совпадаютъ съ прежними?

21. Найти геометр. мѣсто центровъ круговъ, проходящихъ черезъ точку A и видныхъ изъ точки B подъ угломъ α.

22 Подъ какимъ угломъ должны быть наклонены оси координатъ, чтобы уравненію $x^2 + y^2 - xy - hx - hy = 0$ соотвѣтствовала окружность

23 Преобразовать ур—ніе $x^2 - y^2 = 2a(x - y + a)$ взявъ за новое начало координатъ точку $M(a, a)$, а за новыя оси прямыя, биссекторамъ угловъ между координатными осями.

Прямая линія.

24. Провести прямую черезъ точки $M_1(-1,2)$, $M_2(2,1)$.

25. Провести прямую черезъ точки $M_1(2,1)$, $M_2(5,1)$

26. Найти ур ніе сторонъ $\triangle$ка, вершины котораго $M_1(-1, 1)$, $M_2(3,5)$ и $M_3(-7,11)$.

27. Найти разстояніе прямой $4x + 4y - 1 = 0$ отъ начала координатъ и углы, образованные перпендикуляромъ къ этой прямой изъ начала съ координатными осями. $\theta = 120^0$

28. Написать ур ніе прямой, проходящей черезъ точку $M(2,1)$ и образующей съ осью OX уголъ въ 45^0 $\theta = 60^0$.

29. Черезъ точку $M(3,4)$ провести прямую такъ, чтобы площадь $\triangle$-ка, стороны котораго координатныя оси и искомая прямая, равнялась-бы 9 кв ед.

30 Найти ур -ніе прямой, проходящей черезъ точку $M(-4,3)$ и удаленной отъ начала координатъ на разстояніе равное 5 ед. дл.

31 Черезъ точку $(-1,3)$ провести прямую, разстояніе которой отъ точки $(3,-1)$ равно 2 ед дл.

32. Черезъ точку $M(1,2)$ провести прямую, разстоянія до которой точекъ $M_1(2,3)$ и $M_2(4,-5)$ были бы одинаковы.

33. Найти площадь $\triangle$-ка $M_1(2,1)$, $M_2(-1,2)$, $M_3(-2,1)$. $\theta = 90^0$

34. Найти площадь $\triangle$-ка, стороны котораго $y = 3x + 9 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ $x + y - 1 = 0$ $\theta = 90^0$

35. Найти угловые коэффиценты сторонъ равносторонняго $\triangle$-ка задачи № 16 относительно осей $X_1O_1Y_1$, найти уравненія этихъ сторонъ въ отрѣзкахъ и провѣрить, правильно-ли найдены угловые коэффиценты.

36. Найти разстояніе между параллельными прямыми $x + 2y - 1 = 0$, $x + 2y + 4 = 0$. $\theta = 60^0$.

37. Найти углы $\triangle$-ка $M_1(0,1)$, $M_2(1,1)$, $M_3(1,0)$.

38. Черезъ точку $M(3,5)$ провести прямыя подъ угломъ въ 45^0 къ прямой $3x - 2y + 7 = 0$.

39. Написать уравненіе прямой, лежащей по срединѣ между двумя данными параллельными прямыми $3x + 2y = 5$, $6x + 4y + 4 = 0$.

40. Дана прямая $4x+3y+1=0$. Найти уравненіе прямой, параллельной данной, такъ чтобы разстояніе между прямыми было равно 3 ед.

41. Найти уравненіе прямой, параллельной прямой $2x+3y+6=0$, если извѣстно, что она отсѣкаетъ отъ координатнаго угла треугольникъ, площадь котораго 3 кв. ед.

42. Въ параллелограммѣ $ABCD$ даны уравненія сторонъ AB $(3x+4y-12=0)$ и AD $(5x-12y-6=0)$ и точка $E\left(-2, \frac{14}{6}\right)$ средина стороны BC. Найти уравненія другихъ сторонъ параллелограмма.

43. Найти прямую, параллельную прямымъ $x+2y-1=0$, $x+2y-3=0$, расположенную между ними и дѣлящую разстояніе между ними соотвѣтственно въ отношеніи $1:3$.

44. Даны уравненія двухъ сторонъ параллелограмма $x+2y+1=0$, $2x+y-3=0$ и точка пересѣченія его діагоналей $N(1,2)$. Найти уравненія двухъ другихъ сторонъ этого параллелограмма.

45. Найти уравненіе круга, для котораго точки A $(1,3)$ и B $(3,-5)$ являются концами одного изъ его діаметровъ.

46. Даны двѣ точки M_1 $(2,3)$ и M_2 $(12,5)$. Найти на оси абсциссъ точку P такую, чтобы уголъ M_1PM_2 былъ прямой.

47. Изъ точки M $(2,1)$ опустить перпендикуляры на прямыя: *a)* $x+y-1=0$, $\theta=90^\circ$, *b)* $x+2y-1=0$, $\theta=60^\circ$, *c)* $x=3$, $\theta=60^\circ$.

48. Даны двѣ точки M_1 $(1,3)$ и M_2 $(-1,-5)$. На прямой $2x+3y+1=0$ найти точку, одинаково удаленную отъ двухъ данныхъ точекъ. $\theta=60^\circ$.

49. Найти уравненіе круга, описаннаго около треугольника, вершины котораго суть A $(0,3)$, B $(1,1)$ и C $(4,1)$.

50. Найти уравненіе круга, описаннаго около треугольника, вершины котораго суть M_1 $(0,0)$, M_2 $(10,0)$, M_3 $(6,8)$.

51. Найти уравненіе круга, описаннаго около треугольника, вершины котораго суть M_1 $(1,3)$, M_2 $(-2,1)$ и M_3 $(-1,-3)$.

52. На окружности $x^2+y^2=1$ найти точку одинаково удаленную отъ точекъ M_1 $(1,3)$ и M_2 $(-2,2)$.

53. Найти координаты точки равноудаленной отъ точекъ M_1 $(4,-3)$ и M_2 $(2,-1)$ и отстоящей отъ прямой $2x+y-1=0$ на разстояніи равномъ 2 ед.

54. Даны уравненія высотъ треугольника $2x-3y+1=0$, $x+y=0$ и координаты одной изъ его вершинъ M_1 $(1,2)$. Найти уравненія сторонъ треугольника.

55. Даны двѣ вершины треугольника M_1 $(2,1)$ и M_2 $(4,9)$ и точка пересѣченія его высотъ N $(3,4)$. Найти уравненія сторонъ треугольника.

56. Даны координаты срединъ сторонъ треугольника M_1 $(1,2)$ M_2 $(7,4)$ M_3 $(3,-4)$. Найти уравненія сторонъ.

57. Даны уравненія сторонъ треугольника $x+y-1=0$ и $y+1=0$ и точка $(-1,0)$ пересѣченія медіанъ. Найти уравненіе третьей стороны.

58. Черезъ точку M $(1,1)$ провести прямую такъ, чтобы уголъ между прямою $x=y$ и ею, отсчитанный противъ часовой стрѣлки отъ прямой $x=y$, былъ бы равенъ 60°.

59. Черезъ точку $(5,1)$ провести прямую, составляющую съ прямой $5x+6y-1=0$ уголъ въ 60°.

60. Написать уравненіе прямой, проходящей черезъ точку M $(1,2)$ и составляющей уголъ $\varphi=15^\circ$ съ прямой $y=x+5$.

61. Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точку M $(2,-1)$ и составляющей съ осью OX уголъ вдвое большій, чѣмъ уголъ прямой $3y-x=4$ съ той же осью.

62. Найти уравненія перпендикуляровъ опущенныхъ изъ вершинъ треугольника ABC, гдѣ A $(1,2)$, B $(-1,0)$ и C $\left(1,-\frac{1}{3}\right)$, на его стороны и убѣдиться, что они пересѣкаются въ одной точкѣ.

63. Черезъ точку пересѣченія прямыхъ $x-y-1=0$, $x+2y-2=0$ и точку M $(-1,1)$ провести прямую.

64. Найти прямую, которая проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ $x+y-1=0$, $x+2y+1=0$ и отсѣкаетъ на отрицательной части оси OY отрѣзокъ, длина котораго 2 ед. дл.

65. Черезъ точку пересѣченія прямыхъ $x+2y-1=0$, $x-y+1=0$ провести прямыя: a) черезъ точку $(0,1)$, b) параллельно прямой $x-y-10=0$, c) перпендикулярно къ прямой $x+y-1=0$.

66. Черезъ точку пересѣченія прямыхъ $y=2x+5$ и $x=2$ провести прямую, перпендикулярную къ оси OY (не находя координатъ точки пересѣченія). $\theta=120^\circ$.

67. Черезъ точку пересѣченія прямыхъ $x + 2y - 11 = 0$, $2x - y - 2 = 0$ провести прямую, разстояніе которой отъ начала координатъ равно 5.

68. Черезъ точку пересѣченія прямыхъ $2x + 5y + 8 = 0$, $3x - 4y - 7 = 0$ провести прямую, уголъ между которой и прямой $y = 4x + 3$ равенъ 45° ($\theta = 90^\circ$).

69. Черезъ точку $M(-1,1)$ провести прямую такъ, чтобы середина отрѣзка ея между параллельными прямыми $x + 2y - 4 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$ лежала бы на прямой $x - y + 1 = 0$.

70. Черезъ начало координатъ провести прямыя такъ, чтобы отрѣзки ихъ между двумя прямыми $x - y + 1 = 0$, $x - y - 2 = 0$ равнялись 5 единицамъ.

71. Найти биссекторы угловъ между прямыми $3x + 4y - 1 = 0$, $4x - 3y + 5 = 0$.

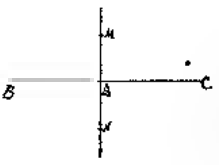
72. Найти уравненіе биссектора того угла между прямыми $12x - 35y = 23$, $11x + 60y = -71$, въ которомъ находится начало координатъ.

73. Найти биссекторы того угла между прямыми $x + 2y - 5 = 0$, $2x - y + 4 = 0$, въ которомъ лежитъ точка $M(1,1)$.

74. Найти уравненія внутреннихъ биссекторовъ $\triangle$-ка $M(1,2)$, $M_2(-1, -1)$, $M_3(2,1)$.

75. Найти уравненія внѣшнихъ биссекторовъ $\triangle$-ка $M_1(1,2)$, $M_2(-1, -1)$, $M_3(2,1)$.

76. Найти уравненіе круга вписаннаго въ треугольникъ, заданный уравненіями его сторонъ: $AB(3x - 4y = 25)$, $BC(5x + 12y = 65)$ и $CA(8x + 15y + 85 = 0)$.



Черт. 5.

77. Даны уравненія боковыхъ сторонъ равнобедреннаго треугольника $2x - y + 8 = 0$, $x + 4y + 12 = 0$ и точка на его основаніи $(-1, 1)$. Найти уравненіе основанія.

78. Найти отраженіе точки $M(2,1)$ въ прямой $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ ($\theta = 60^\circ$).

Примѣчаніе. Если $MN \perp$ къ BC и A середина MN, то N отраженіе M. (Черт. 5).

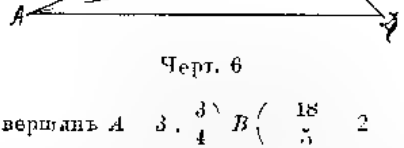
79. Найти отраженіе точки $M(2,1)$ въ оси OY ($\theta = 60^\circ$).

80. Лучъ свѣта, проходящій черезъ точку $(2,3)$, отражается отъ прямой $x + y + 1 = 0$ и проходитъ послѣ этого черезъ точку $(-1,1)$. Найти уравненія лучей падающаго и отраженнаго.

81. Лучъ свѣта, проходящій черезъ точку $M(1,2)$ отражается отъ прямой $x + 5y + 1 = 0$ и снова проходитъ черезъ точку $N(-1,3)$. Найти уравненія лучей падающаго и отраженнаго.

82. Прямая $2x + y - 1 = 0$ внутренній биссекторъ треугольника, двѣ вершины котораго суть точки $M(-1,2)$ и $M_2(-1, -1)$. Найти уравненія сторонъ треугольника ($\theta = 90^\circ$).

83. Даны координаты вершины треугольника $(2,5)$ и уравненія внутреннихъ биссекторовъ угловъ его $3x + 4y - 12 = 0$ и $x - y - 1 = 0$. Найти уравненія сторонъ треугольника.



Черт. 6

84. Даны двѣ вершины треугольника $A(-1,1)$ и $B(5,4)$, уравненіе биссектора внутренняго угла $2x - y - 1 = 0$ и площадь треугольника $= 5$ кв. ед. Найти уравненія сторонъ.

85. Въ трапеціи $ABCD$ даны координаты вершинъ $A\left(-3, \frac{3}{4}\right)$, $B\left(\frac{18}{5}, -2\right)$ и $D(0,3)$. Кромѣ того извѣстно, что діагональ AC дѣлитъ уголъ BAD пополамъ. Найти вершину C (Черт. 5).

86. На прямой $x + 2y - 1 = 0$ найти точку, изъ которой данная окружность $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ видна подъ угломъ въ 60°.

87. Даны уравненія основанія равнобедреннаго треугольника $x + y - 1 = 0$ и боковой его стороны $x - 3y - 2 = 0$; точка $(-1,-2)$ лежитъ на другой боковой сторонѣ. Найти уравненіе третьей стороны треугольника.

88. Даны двѣ прямыя $x + y - 1 = 0$ и $x - 3y - 2 = 0$ и точка $(-1,-2)$. Найти прямую, проходящую черезъ данную точку и образующую съ данными прямыми треугольникъ, котораго площадь $= 10$ кв. ед.

89. Внутри треугольника $M_1M_2M_3$, гдѣ $M_1\left(+\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $M_2(-2,3)$, $M_3(-2,-6)$ найти такую точку V, чтобы прямыя, соединяющія ее съ вершинами, раздѣляли треугольникъ на три равновеликія части.

90. Доказать что сумма разстояній всякой точки внутри равносторонняго треугольника до сторонъ постоянна.

91. Во всякомъ треугольникѣ точки пересѣченія высотъ, медіанъ и центръ описаннаго круга лежатъ на одной прямой.

92. Взять прямыя $2x - y + 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ соотвѣтственно за новыя оси $O_1 X_1$ и $O_1 Y_1$, приписавъ имъ такія направленія, чтобы новыя координаты стараго начала были положительны. Составить формулы для перехода.

93. Взять прямыя $2x - y + 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ $(\beta = 60^0)$ соотвѣтственно за новыя оси $O_1 X_1$ и $O_1 Y_1$, приписавъ имъ такія направленія, чтобы новыя координаты точки $M(1,4)$ были положительны. Составить формулы для перехода.

94. Взять прямыя $x - y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$ $(\beta = 60^0)$, соотвѣтственно за новыя оси $O_1 X_1$ и $O_1 Y_1$, приписавъ имъ такія направленія, чтобы новыя координаты точки $M(1,1)$ были отрицательны. Составить формулы для перехода.

95. Прямыя $x - y - 1 = 0$ и $x + y + 2 = 0$, заданныя въ системѣ прямоугольныхъ осей, взять за новыя координатныя оси $O_1 X_1$ и $O_1 Y_1$ соотвѣтственно и выбрать такъ направленія новыхъ осей, чтобы новыя координаты стараго начала были отрицательны. Найти уравненія старыхъ осей въ новой системѣ координатъ.

96. Биссекторы угловъ между прямыми $7x + 23y - 7 = 0$ (1) $x - y + 1 = 0$ (2) приняты за координатныя оси, при чемъ новая ось $O_1 X_1$ биссекторъ того угла между прямыми (1) и (2), гдѣ лежитъ начало старыхъ координатъ, новыя координаты котораго положительны. Найти *новое уравненіе* прямой (2), и послѣ чего сразу написать уравненіе прямой (1).

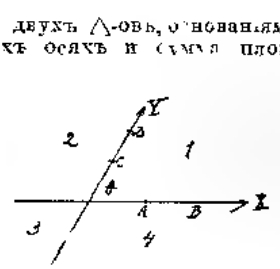
97. Найти уравненія общихъ касательныхъ къ окружностямъ $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

Геометрическія мѣста.

98. Даны двѣ пары точекъ A_1, B_1 и A_2, B_2. Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ M, что отношеніе площадей треугольниковъ MA_1B_1 и MA_2B_2 имѣетъ постоянное значеніе.

99. Найти геометрическое мѣсто всѣхъ вершинъ двухъ $\triangle$-овъ, основаніями которыхъ служатъ отрѣзки AB и CD на координатныхъ осяхъ и сумма площадей которыхъ $= S$, для $AB = a$, для $CD = b$. Черт. 7.

100. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія перпендикуляровъ къ сторонамъ даннаго угла, если средина разстоянія между основаніями этихъ перпендикуляровъ находится на данной прямой.



Черт. 7

Черт. 8.

101. Данъ треугольникъ AOB; по двумъ его сторонамъ OA и OB перемѣщаются точки P и Q такъ, что $AP = BQ$. Найти геометрическое мѣсто средины отрѣзка PQ.

102. Дано основаніе BC треугольника и сумма s его боковыхъ сторонъ. На перпендикулярѣ, опущенномъ изъ вершины A на основаніе BC, откладываемъ отрѣзокъ DM, равный сторонѣ BA. Найти геометрическое мѣсто точки M. (Черт. 8).

103. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія медіанъ треугольника, если дано его основаніе, а противоположная вершина находится на прямой $y = mx + n$.

104. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія діагоналей прямоугольниковъ, вписанныхъ въ данный треугольникъ такъ, что одна изъ сторонъ послѣднихъ совпадаетъ съ основаніемъ треугольника.

105. Дано основаніе треугольника, противоположная ему вершина движется по данной прямой. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія высотъ треугольника.

106. Прямая вращается около точки $M(1, 2)$, пересѣкая оси координатъ въ точкахъ A и B. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія перпендикуляровъ, возставленныхъ къ осямъ координатъ въ точкахъ A и B $(\beta = 120^0)$.

107. Данъ уголъ $AOB = \omega$, прямая AB перемѣщается такъ, что площадь треугольника AOB все время остается постоянной, равной S. Найти геометрическое мѣсто точки M, дѣлящей отрѣзокъ AB въ отношеніи $AM : MB = m : n$.

108. Данъ уголъ φ при вершинѣ треугольника. Найти геометр. мѣсто точки M, въ которой основаніе треугольника дѣлится въ данномъ отношеніи $m : n$ въ то время, какъ площадь треугольника остается постоянно равной C. За координатный уголъ взять уголъ φ.

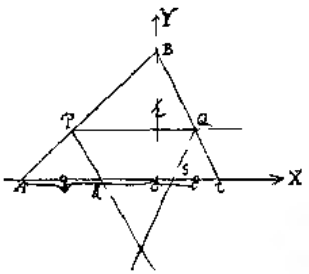
109. Дано основаніе $2a$ треугольника и извѣстно, что одинъ изъ угловъ при основаніи вдвое болѣе другого. Найти геометрическое мѣсто вершины, взявъ за ось OX основаніе треугольника, а за ось OY перпендикуляръ, возставленный изъ середины основанія.

110. Найти геом. мѣсто точки пересѣченія прямыхъ, параллельныхъ осямъ координатъ и проходящихъ черезъ точки M и N на координатныхъ осяхъ, причемъ линія MN вращается вокругъ неподвижной своей точки x_0, y_0.

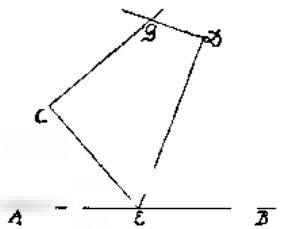
111. Дано основаніе $2a$ и разность φ угловъ при основаніи треугольника. Найти геометрическое мѣсто вершины, взявъ за ось OX основаніе треугольника, а за ось OY перпендикуляръ, возставленный изъ середины основанія.

112. Данъ треугольникъ OAB. Длина стороны $OB = a$, длина стороны $OA = b$. Прямая, параллельная сторонѣ AB, пересѣкаетъ стороны треугольника въ точкахъ P и Q. Проведены прямыя PA и QB. Найти геометрическое мѣсто пересѣченія этихъ прямыхъ. Указаніе: за ось OX взять OA, за ось $OY = OB$.

113. Данъ треугольникъ ABC. (Черт. 9.) Прямая, параллельная основанію AC, пересѣкаетъ стороны треугольника въ точкахъ P и Q. Эти точки соединяются прямыми PR и QS съ двумя неподвижными точками R и S основанія. Найти геометрическое мѣсто пересѣченія этихъ прямыхъ.



Черт. 9.



Черт. 10

114. Найти геометрическое мѣсто серединъ отрѣзковъ, отсѣкаемыхъ прямыми $x + 2y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$ отъ прямыхъ, параллельныхъ прямой $2x + y = 0$.

115. Дана прямая AB и внѣ ея точки C и D. Перемѣнная точка E прямой AB соединена съ точками C и D, и изъ послѣднихъ возстановлены до взаимной встрѣчи перпендикуляры GC и GD. Найти геометрическое мѣсто точки G. (Черт. 10).

116. Найти уравн. г. м. вершинъ $\triangle$-овъ, основаніе которыхъ расположено на оси X-овъ, дѣлится началомъ координатъ пополамъ и равно $2a$, а сумма медіанъ двухъ боковыхъ сторонъ равна k.

117. Составить уравн. г. м. вершинъ $\triangle$-овъ, основаніе которыхъ расположено на оси X-овъ, равно $2a$ и дѣлится началомъ координатъ пополамъ, а сумма квадратовъ медіанъ двухъ боковыхъ сторонъ равна k^2.

118. Найти уравн. г. м. центровъ тяжести $\triangle$-овъ, стороны которыхъ лежатъ на прямыхъ $x = 0$, $y = 0$, $\frac{x}{k} + \frac{y}{3k} = 1$, причемъ $0 < k < 3$.

119. Найти уравн. г. м. вершинъ D параллелограмовъ, у которыхъ уголъ $B = 60°$, стороны AB и BC расположены вдоль положительныхъ направленій координатныхъ осей, а длина діагонали AC равна k.

120. Прямоугольный треугольникъ ABC неизмѣнной величины, скользитъ вершинами острыхъ угловъ B и C по двумъ взаимно перпендикулярнымъ прямымъ. Найти геометрическое мѣсто вершины прямого угла.

Черт. 11.

121. Проводятся линіи параллельныя одной изъ сторонъ треугольника, и въ точкахъ пересѣченія ихъ съ двумя другими сторонами возставляются перпендикуляры къ послѣднимъ. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія этихъ перпендикуляровъ.

122. Въ треугольникѣ извѣстно основаніе и разность угловъ при основаніи. Найти геометрическое мѣсто вершинъ.

123. Три вершины параллелограмма, стороны котораго остаются параллельными даннымъ направленіямъ, скользятъ по тремъ даннымъ прямымъ. Найти геометрическое мѣсто четвертой вершины.

124. Сторона AB квадрата $ABCD$ проходитъ черезъ данную точку O, вершины A и B скользятъ по двумъ даннымъ параллельнымъ прямымъ. Найти геометрическое мѣсто вершинъ C и D. (Черт. 11.)

125. Найти геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ два отрѣзка AB и CD одной прямой видны подъ равными (или дополнительными) углами.

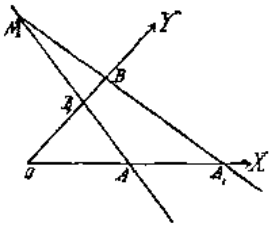
126. Найти уравн. г. м. центровъ тяжести прямоугольныхъ $\triangle$-овъ, которыхъ катеты расположены по положительнымъ направленіямъ координатныхъ осей, а периметръ равенъ $2p$.

127. На осяхъ координатъ даны неподвижныя точки A и B и перемѣнныя A_1 и B_1, такъ что $OA + OB = OA_1 + OB_1$. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія прямыхъ AB_1 и A_1B. (Черт 12).

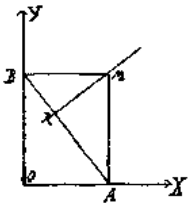
128. Найти геометрическое мѣсто срединъ хордъ круга $x^2 + y^2 = r^2$, проходящихъ черезъ данную внутри круга точку P (c, o).

129. Въ перемѣнномъ прямоугольникѣ $OBMA$ периметръ постоянный, т. е. $OB + OA = m$. Показать, всѣ прямыя MK, проходящія черезъ вершину M перпендикулярно къ діагонали AB, пересѣкаются въ одной точкѣ (Черт 13)

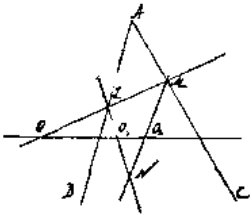
130. Даны на прямой OX три точки O, O_1 и O_2 и уголъ BAC. Проведя черезъ O произвольную прямую, пересѣкающую стороны угла BAC въ точкахъ L и M а



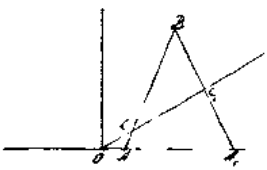
Черт 12.



Черт. 13.



Черт. 14.



Черт 15.

также прямыя черезъ точки L и O_1, M и O_2, получимъ перемѣнный треугольникъ LMN. Найти геометрическое мѣсто вершины N. (Черт. 14)

131. Около точки A внутри даннаго круга вращается прямой уголъ; черезъ точки пересѣченія его сторонъ съ окружностью проводятся касательныя къ кругу. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія этихъ касательныхъ

132. Данъ треугольникъ ABA_1. Черезъ неподвижную точку O на сторонѣ AA_1 проводится подвижная сѣкущая OCC_1 и затѣмъ круги черезъ точки O, A, C и черезъ точки O, A_1, C_1. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія этихъ круговъ. Черт. 15, $OA = a$, $OA_1 = a_1$).

133. Въ треугольникѣ, основаніе котораго a, одинъ изъ угловъ при основаніи вдвое больше другого. Найти геометрическое мѣсто вершины.

134. Прямой уголъ CAB вращается около вершины A. Стороны его пересѣкаютъ стороны неподвижнаго прямого угла съ вершиной въ O въ точкахъ B и C. Найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ O на прямую CB

135. Если квадратъ неизмѣнной величины перемѣщается, такъ что двѣ смежныя стороны AB и AD проходятъ черезъ данныя точки, то діагональ AC проходитъ черезъ постоянную точку.

136. Даны кругъ и прямая; если изъ точекъ прямой какъ центра, описывать окружности радіуса, равнаго длинѣ касательной къ данной окружности, то всѣ эти окружности будутъ проходить черезъ двѣ постоянныя точки

137. Если четыре стороны параллелограмма проходятъ черезъ четыре неподвижныя точки на прямой, то діагонали проходятъ также черезъ неподвижныя точки.

138. Даны двѣ параллельныя прямыя и точка P между ними. Перемѣнная прямая перемѣщается такъ, что отрѣзокъ ея AB между параллельными виденъ изъ точки P подъ прямымъ угломъ. Найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ P на AB.

199. Даны точка и прямая. Уголъ постоянной величины вращается около вершины, находящейся въ данной точкѣ. Найти геометрическое мѣсто центра круга, описаннаго около треугольника, образованнаго сторонами угла и данной прямой.

140. Въ трапеціи $ABCD$ параллельныя стороны AD и BC имѣютъ данную длину вершины A и B закрѣплены неподвижно. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія діагоналей.

141. На оси OX даны точки A и B; на оси OY берется точка M и проводятся прямыя $AP \perp BM$, $BP \perp AM$. Найти геометрическое мѣсто точки P, когда M перемѣщается по оси OY.

142. Найти геометрическое мѣсто точекъ такого рода, чтобы одна изъ биссектрисъ угловъ, образуемыхъ прямыми, соединяющими эту точку съ двумя данными точками A и B, имѣла данное направленіе.

Линіи второго порядка. Общее изслѣдованіе уравненій.

143. Опредѣлить видъ линій 1) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$, 2) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$, 3) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$.

144. Прибавить къ лѣвой части ур-нія $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ такое число, что бы получилось ур-ніе соотвѣтствующее точкѣ. Найти эту точку.

145. Прибавить къ лѣвой части ур-нія $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$ такое число, чтобы получилось ур-ніе двухъ пересѣкающихся прямыхъ.

146. Въ уравненіи $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y + k = 0$ опредѣлить число k такъ чтобы уравненію соотвѣтствовали двѣ прямыя. Найти эти прямыя.

147. Опредѣлить въ уравненіи $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y + k = 0$ число k такъ чтобы этому уравненію соотвѣтствовала точка. Найти эту точку.

148. Въ уравненіи $x^2 - 2\lambda xy + 4y^2 + 2x - \lambda y = 0$ подобрать λ такъ, чтобы оно представляло двѣ прямыя. Найти уравненія этихъ прямыхъ.

149. Найти прямыя, выражаемыя уравненіемъ $x^2 - 2xy\,Sec\varphi + y^2 = 0$ и уголъ между ними при φ постоянномъ.

150. Найти ур-нія линіи 2-го порядка, проходящей черезъ точки M_1 (1,1), M_2 (2, 1), M_3 (1,—2), M_4 (—1,1) и M_5 (3,0).

151. Найти ур-нія асимптотъ кривой $2x^2 - xy + 3x - y - 1 = 0$.

152. Найти асимптоты гиперболы $x^2 + {}^3/_2\,xy - y^2 - 2x + y - 1 = 0$.

153. Найти уравненія асимптотъ кривой $(ax + by + c)^2 - (a^1x + b^1y + c^1) = k^2$.

154. Написать общее уравненіе линій 2-го порядка, касающихся оси OX въ началѣ координатъ.

155. Найти ур-ніе линіи 2-го порядка, касающейся оси OX въ точкѣ (1,0), оси OY въ точкѣ (0,1), и касательной къ прямой $x + y - 2 = 0$.

156. Дана окружность $x^2 + y^2 - 1 = 0$ и два ея діаметра $x + 2y = 0$, $2x + y = 0$. Найти ур-нія совокупностей противоположныхъ хордъ, соединяющихъ концы діаметровъ.

157. Дана окружность $x^2 + y^2 - 5 = 0$ и совокупность двухъ сторонъ $\triangle$-ка въ нее вписаннаго. $(3x - 2y - 4)(x + y - 3) = 0$. Найти ур-ніе третьей стороны.

158. Найти линію 2-го порядка, проходящую черезъ точки пересѣченія кривой $x^2 - 2xy + 2x - 2y - 17 = 0$ съ прямыми $y = 0$, $x + 2y + 3 = 0$ и черезъ точку (1,1).

159. Дана кривая 2-го порядка $Ax^2 + By^2 + C = 0$ и точка M съ координатами a и b. Около точки M, какъ центра, описываются окружности. Найти геометрическое мѣсто серединъ хордъ, общихъ этимъ окружностямъ и данной кривой.

Центръ и діаметры

160. Найти координаты центра линіи $x^2 + xy + x + y - 2 = 0$ и перенести начало координатъ въ центръ, не мѣняя направленія осей.

161. Перенести начало координатъ въ центръ, не мѣняя направленія осей $15x^2 + 20xy + 4y^2 + 30x + 4y + 1 = 0$. (Не находя координатъ центра).

162. Найти асимптоты гиперболы $x^2 + xy + 2x + y - 1 = 0$.

163. Найти ур-ніе гиперболы, асимптоты которой $x + y - 1 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ и которая проходитъ черезъ точку M (1,1).

164. Составить общее ур-ніе линій 2-го порядка, центръ которыхъ въ точкѣ (x_c, y_c).

165. Преобразовать ур-ніе гиперболы $(ax + by + d)(\alpha x + \beta y + \delta) + K = 0$, перенеся начало координатъ въ центръ безъ измѣненія направленія осей.

166. Найти уравн. г. м. центровъ круговъ, описанныхъ вокругъ прямоугольныхъ $\triangle$овъ, катеты которыхъ расположены вдоль координатныхъ осей, а периметръ равенъ $2p$.

167. Найти г. м. центровъ центральныхъ кривыхъ, касающихся оси OX въ точкѣ (1,0) и оси OY въ точкѣ (0,1).

168. Найти геометрическое мѣсто центровъ круговъ, проходящихъ черезъ данную точку A и отсѣкающихъ на данной прямой отрѣзокъ постоянной длины.

169. Найти хорды, съ которыми сопряженъ діаметръ $2x - 5y - 3 = 0$ линіи $2x^2 - xy - y^2 + x - 2y + 1 = 0$.

170. Найти хорды, съ которыми сопряженъ діаметръ $x - 2y + 3 = 0$ линіи $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$.

171. Найти уравненіе діаметра линіи $2x^2 - xy - y^2 + x - 2y + 1 = 0$, проходящаго черезъ точку $(-2,0)$

172. Черезъ точку M (1,2) провести діаметръ линіи $4x^2 - 4xy + y^2 - x - y - 1 = 0$

173. Найти уравненіе діаметра линіи $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$, параллельнаго прямой $3x + 2y - 1 = 0$.

174. Найти общій діаметръ линій $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$ и $x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0$.

175 Найти діаметръ общій для кривыхъ.

$$(x - y)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

176 Найти г. м. серединъ отрѣзковъ, отсѣваемыхъ прямыми $x + 2y - 1 = 0$ $x + y + 1 = 0$ отъ прямыхъ, параллельныхъ прямой $2x + y = 0$.

177 Найти оси симметріи линіи 1) $x^2 + xy + y^2 - x + y + 1 = 0$ и 2) $x^2 + xy + y^2 = 0$.

178. Найти оси симметріи линій

a) $x^2 + 8xy + 8y^2 + 4x + 8y = 0$
b) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$ } $\theta = 60°$
c) $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

179. Найти пересѣченіе кривой ($\theta = 60°$) $xy + 2y^2 + x + 5y + 3 = 0$ съ осью X и опредѣлить угловые коэффиціенты осей симметріи.

180. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, отсѣкающихъ на сторонахъ даннаго угла хорды данной длины.

Приведеніе къ простѣйшему виду.

Привести къ простѣйшему виду, найти координаты центра, ур-нія осей симметріи, асимптоты, составить формулы для перехода для слѣдующихъ линій:

181. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$.

182. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$.

183. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$.

184. $8x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x - 10y = 319$

185. $34x^2 - 12xy + 9y^2 + 24x - 72y - 504 = 0$.

186. $13x^2 + 12xy + 4y^2 - 50x - 28y - 11 = 0$.

187. $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$

188. $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$.

189. $7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$.

190 $2xy - 4x - 2y + 3 = 0$

191. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$

192. $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$.

193 $25x^2 - 120xy + 144y^2 - 242x - 298y + 491 = 0$

194. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y = 0$.

195 $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 170x + 310y - 465 =$

196. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$

197. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$

198. $4xy + 4y = 1$.

199. $2x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 4y + 1 = 0$; $\theta = 120°$.

200. $13x^2 + 18xy + 10y^2 - 44x - 38y + 33 = 0$; $\theta = 60°$.

201. $x^2 - xy - 3x + y + 4 = 0$; $\theta = 120°$.

202. $6x^2 + 11xy + 3y^2 - 23x - 17y + 16 = 0$; $\theta = 60°$

203. $4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 7y + 10 = 0$; $\theta = 120°$.

204. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 7x + 8 = 0$; $\theta = 60$.

205. $x^2 + y^2 = 1$, $\theta = 60°$

206. $x^2 - y^2 = 1$, $\theta = 60°$.

207. $xy - 1 = 0$; $\theta = 60°$.

208. $y^2 = 2px$; $\theta = 60°$

209. $x^2 + y = 0$; $\theta = 120°$.

210. Найти уравненіе кривой 2-го порядка, имѣющей прямую $x + y + 1 = 0$ осью и проходящей черезъ точки (0,0), (1, −1), (2,1

211 Найти линію 2-го порядка, для которой прямыя $x - 2y - 1 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ сопряженные діаметры и которая проходитъ черезъ точки $M_1(1,0)$, $M_2(0,1)$.

212. Найти эллипсъ, для котораго прямыя $x + y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$ сопряженные діаметры и полуоси котораго 2 и 1.

213. Найти параболу, для которой прямая $x + y - 1 = 0$ діаметръ, прямая $x + 2y - 1 = 0$ касательная сопряженная съ діаметромъ, и извѣстно, что парабола проходитъ черезъ точку (0,0).

214. Доказать, что ось параболы $[(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2](1 + m^2) - (y - mx)^2 = 0$, гдѣ a, b, c — данныя числа, а m перемѣнный параметръ, проходитъ черезъ постоянную точку.

215. Найти уравненіе параболы, касающейся оси OY въ началѣ коорд. и имѣющей прямую $x + y + 1 = 0$ касательною въ вершинѣ.

216. Написать уравненіе параболы, проходящей черезъ точки (0,1), (0,—1), (1,1) и имѣющей ось параллельную прямой $x - y = 0$.

217 Дано уравненіе параболы $y^2 = 2px$. Уравненіе той же параболы, отнесенной къ діаметру и касательной, уголъ между которыми есть φ, имѣетъ видъ $y_1^2 = 2qx_1$. Найти зависимость между p, q и φ.

218. Найти уравненіе гиперболы, для которой $\left\{\begin{array}{l} y - 1 = 0 \\ y - \sqrt{\frac{8}{19}}\, x + 1 = 0 \end{array}\right\}$ суть сопряженные діаметры, а полуоси $2\sqrt{2}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. $\theta = 90°$.

219. Найти уравненія эллипса, для котораго $\left\{\begin{array}{l} 3x - 4y + n = 0 \\ x + l = 0 \end{array}\right\}$ суть сопряженные діаметры, а полуоси 2 и 1. $\theta = 90°$; n и l произвольны.

220. Взявъ равные сопряженные діаметры эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ за координатныя оси X_1Y_1, составить новое уравненіе эллипса и формулы для перехода къ осямъ симметріи.

221. Найти параметръ параболы, касающейся сторонъ координатнаго прямого угла въ точкахъ $M(u,o)$ и $N(o,v)$.

222. Найти параметръ параболы, касающейся сторонъ координатнаго угла ω въ точкахъ $M(u,o)$ и $N(o,v)$.

223. Прямая $x + y + 1 = 0$ ось параболы, проходящей черезъ точки (0,0) и (0,1). Найти уравненіе параболы.

224. Дана асимптота равнобочной гиперболы $x + y = 0$, точка кривой (1,1) и касательная $2x - y + 1 = 0$; найти уравненіе этой гиперболы.

Задачи на кривыя 2-го порядка, заданныя ур-ніями въ канокическомъ видѣ.

225. Найти ур-нія діаметровъ эллипса $\frac{x^2}{2} + 3y^2 = 1$, длина которыхъ равна 2.

226. Найти ур-нія тѣхъ діаметровъ гиперболы $\frac{4}{3}x^2 - 2y^2 = 1$, длина которыхъ равна 2 и длины діаметровъ съ ними сопряженныхъ и углы между этими взаимно-сопряженными діаметрами.

227. Найти уголъ между равными діаметрами эллипса $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

228. Найти сопряженные діаметры гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, уголъ между которыми 45°.

229. Найти взаимно-сопряженные діаметры эллипса $\frac{1}{3}x^2 + 3y^2 = 1$, уголъ между которыми 150°.

230. Найти ур-ніе эллипса, длины полуосей котораго $\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{3}$ и для котораго прямыя $x + 2y - 4 = 0$, $x - 3y\sqrt{2} + 7 = 0$ взаимно-сопряженные діаметры.

231. Найти ур-ніе гиперболы, длины осей которой 2 и $2\sqrt{\frac{2}{3}}$ и для которой прямыя $x - 3y = 0$ $2x - y - 1 = 0$ взаимно-сопряженные диаметры.

232 Найти ур-ніе вещественной оси симметріи гиперболы, у которой прямыя $2x - y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ асимптоты, и которой принадлежитъ точка $M(1,1)$.

233 Найти ур-ніе гиперболы, асимптота которой $x + y - 1 = 0$ и на которой точки $M_1(1,1)$, $M_2(2,1)$, $M_3(-1, -2)$.

234. Найти равнобочную гиперболу, взаимно-сопряженные диаметры которой $x + 2y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ и на которой точка $M(1,1)$

235 Найти равнобочную гиперболу, асимптота которой $x - y + 1 = 0$ и на которой точки $M_1(1,1)$, $M_2(2,1)$.

236. Найти параметръ параболы по хордѣ, соединяющей точки $M\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ и $N\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ параболы и сопряженной съ діаметромъ, проходящимъ черезъ точку $A(1,1)$ параболы $\theta = 90^\circ$.

237 Взять асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ за координатныя оси. Примѣнить способъ инвариантовъ.

238 Прямой уголъ вращается около вершины, находящейся въ вершинѣ параболы Найти геометрическое мѣсто серединъ хордъ, соединяющихъ точки пересѣченія сторонъ угла съ параболой.

239 Найти геометрическое мѣсто центровъ гиперболъ, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки и имѣющихъ асимптоты, параллельныя даннымъ прямымъ

240 Составить общее уравненіе равнобочныхъ гиперболъ, центръ которыхъ въ точкѣ (x_0, y_0), $\theta = 90^\circ$.

241. Найти г. м центровъ линіи $ax^2 + 2axy - y^2 - 2x - 2ay + a = 0$. Опредѣлить часть кривой, заполненную центрами эллипсовъ.

242 Равнобочныя гиперболы проходятъ черезъ точку (1,0) и касаются оси OY въ точкѣ (0,1). Найти геометрическое мѣсто центровъ этихъ гиперболъ.

243. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія круговъ, построенныхъ на сопряженныхъ полудиаметрахъ эллипса, какъ на діаметрахъ.

244. Найти геометрическое мѣсто серединъ хордъ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, соединяющихъ концы его сопряженныхъ діаметровъ.

245. Найти геометрическое мѣсто вершинъ равнобочныхъ гиперболъ, проходящихъ черезъ данную точку и имѣющихъ асимптотою данную прямую.

246. Черезъ три вершины треугольника A, B, C и черезъ точку M на его плоскости проходятъ, какъ извѣстно, 2 параболы. Опредѣлить геометрическое мѣсто точки M подъ условіемъ, чтобы оси этихъ параболъ были перпендикулярны.

247. Черезъ точки A и B на параболѣ проводятся окружности, которыя пересѣкаютъ параболу въ перемѣнныхъ точкахъ C и D Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія прямыхъ AC и BD.

248. Хорда круга перемѣщается параллельно данному направленію Изъ концовъ этой хорды проводятся прямыя, параллельныя двумъ другимъ даннымъ направленіямъ. Найти геометрическое мѣсто ихъ пересѣченія

249. Черезъ точки A и B проводится рядъ окружностей На дугѣ AB берется точка M такъ, что $MA = \frac{1}{2} MB$ Найти геометрическое мѣсто точки M

250. Найти геометрическое мѣсто центровъ равнобочныхъ гиперболъ, описанныхъ около даннаго треугольника.

Разысканіе фокусовъ и директрисъ.

251 Найти ур-ніе линіи, фокусъ которой въ точкѣ $F(-1,1)$ директриса которой, соотвѣтствующая фокусу F, имѣетъ ур-ніе $x + y - 2 = 0$ и которая проходитъ черезъ начало координатъ.

252. Найти уравненія директрисъ для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, гдѣ $a^2 < b^2$ и $\theta = 90^\circ$

253. Данъ эллипсъ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, написать уравненіе равнобочной гиперболы, имѣющей тѣ же директрисы, когда $a^2>b^2$ и $a^2<b^2$.

254. Данъ эллипсъ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, написать уравненіе софокусной равнобочной гиперболы.

255. Найти разстояніе фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ отъ асимптоты.

256. Найти общія ур-нія эллипсовъ (гиперболъ), имѣющихъ фокусы въ точкахъ $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$.

257. Найти фокусы и директрисы линіи $8x^2+4xy+5y^2+8x-15y-16=0$.

258. Найти фокусъ и директрису параболы $x^2-4xy+4y^2-2x-6y+2=0$.

259. Найти ур-ніе эллипса, фокусъ котораго въ точкахъ $F_1(1,2)$ и $F_2(2,1)$ и который проходитъ черезъ точку $M(3,3)$.

260. Найти равнобочную гиперболу, директриса которой $x+y-1=0$, а фокусъ $F(1,1)$.

261. Найти ур-нія параболъ, директриса которыхъ прямая $x+y-1=0$ и которыя проходятъ черезъ точки $M_1(1,1)$ и $M_1(1,2)$.

262. Найти ур-ніе линіи 2-го порядка, директрисы которой прямыя $x-2y+1=0$, $x-2y-5=0$ и фокусъ которой точка $F(2,1)$.

263. Найти ур-ніе линіи 2-го порядка, директрисы которой прямыя $x-2y+1=0$, $x-2y-5=0$ и фокусъ которой точка $F(-2,0)$.

264. Доказать, что разстояніе фокуса отъ какой-нибудь точки гиперболы равно отрѣзку прямой, параллельной асимптотѣ и проходящей черезъ M, начало котораго въ M, а конецъ на директрисѣ.

265. Найти эксцентриситетъ (астрономическій) эллипса, если его малая ось видна изъ фокуса подъ прямымъ угломъ.

266. Даны фокусы кривой 2-го порядка $F_1(3,6)$ и $F_2(-3,-6)$ и ея эксцентриситетъ $\frac{5}{9}$. Найти уравненіе линіи.

267. Кривая 2-го порядка, проходящая черезъ точку $(0,-1)$, имѣетъ центръ въ точкѣ $(1,1)$, а директрисою прямую $x+2y+1=0$. Найти ея уравненіе.

268. Найти ур-нія линій 2-го порядка, проходящихъ черезъ точки $M_1(0,1)$, $M_2(1,0)$, $M_3(0,2)$, и имѣющихъ фокусомъ точку $F(1,1)$.

269. Найти равнобочную гиперболу, директриса которой $x+y+1=0$, а фокусъ $F(1,1)$.

270. Найти уравненіе линіи 2-го порядка, проходящей черезъ точки $(0,0)$ и $(1,0)$ по уравненіямъ директрисы $x+y+1=0$ и оси $x-y=0$.

271. Найти ур-ніе линіи 2-го порядка, проходящей черезъ точки $M_1(4,5)$ и $M_2(-3,4)$, имѣющей фокусомъ точку $F(1,1)$ а осью симметріи, содержащей фокусъ прямую $x+y-2=0$.

272. Найти геометрическое мѣсто фокусовъ параболъ, проходящихъ черезъ точку $M(1,-1)$ и имѣющихъ директрисой прямую $x+y+1=0$.

273. Разсматривается система параболъ, проходящихъ черезъ данную точку и имѣющихъ данную прямую директрисой, найти геометрическое мѣсто ихъ вершинъ.

274. Составить уравненіе параболы, проходящей черезъ начало, по уравненіямъ директрисы $x+y+1=0$ и оси $x-y-1=0$.

275. Линія $x-y=0$ — ось параболы, проходящей черезъ точку $(1,-1)$, а точка $(0,0)$ — фокусъ. Найти уравненіе параболы.

276. Найти уравненіе параболы, зная вершину $(0,0)$ и фокусъ $(1,1)$.

277. Точки пересѣченія фокальной хорды съ эллипсомъ соединены съ другимъ фокусомъ. Найти площадь полученнаго треугольника при данномъ углѣ α наклоненія хорды къ большой оси эллипса, по данному эксцентриситету e и длинѣ большой полуоси a.

278. Найти геометрическое мѣсто центровъ равнобочныхъ гиперболъ, проходящихъ черезъ точку $(0,0)$ и имѣющихъ директрисою прямую $x+y+1=0$.

279. Найти уравненіе гиперболы, имѣющей фокусъ въ началѣ координатъ, асимптотою прямую $x=1$ и проходящей черезъ точку $(0,1)$.

280. Прямыя $x-y+1=0$, $x+y-1=0$ — асимптоты гиперболы, имѣющей фокусъ въ точкѣ $(0,2)$. Составить уравненіе этой гиперболы.

281. Найти геометрическое мѣсто фокуса равнобочныхъ гиперболъ, проходящихъ черезъ начало координатъ и имѣющихъ прямыя $x \pm y - 1 = 0$ директрисами, соотвѣтствующими этому фокусу.

282. Геометрическое мѣсто фокуса равнобочныхъ гиперболъ, проходящихъ черезъ $M(1, 1)$, есть $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$. Найти уравненія директрисъ, соотвѣтствующихъ этому фокусу и проходящихъ черезъ начало координатъ.

283. Прямыя $2y + x - 27 = 0$, $2y + x + 27 = 0$ директрисы линіи 2-го порядка; эксцентриситетъ ея равенъ $\sqrt{\frac{5}{9}}$ и центръ лежитъ на оси ординатъ. Найти ея уравненіе.

284. Найти г. м. фокусовъ равностороннихъ гиперболъ, имѣющихъ директрисой ось OY и отсѣкающихъ на оси OX постоянный отрѣзокъ величины a.

285. Хорда параболы перемѣщается такимъ образомъ, что окружность, описанная на ней, какъ на діаметрѣ, постоянно касается директрисы, доказать, что эта хорда проходитъ черезъ постоянную точку.

286. Изъ фокуса эллипса проведено m полупрямыхъ, составляющихъ между собою равные углы. Если обозначить черезъ $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_m$ длины отрѣзковъ этихъ полупрямыхъ между фокусомъ и точками пересѣченія ихъ съ эллипсомъ и составить сумму $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \ldots + \frac{1}{\rho_m}$, то оказывается, что эта сумма не зависитъ отъ выбора первой полупрямой.

287. Найти геометрическое мѣсто фокусовъ кривыхъ 2-го порядка, вписанныхъ въ данный параллелограмъ.

Касательныя къ кривымъ 2-го порядка.

288. Найти касательныя къ эллипсу $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$, проходящія черезъ точку (12,31).

289. Найти уравненія касательныхъ, проходящихъ черезъ точку (21, 26), къ гиперболѣ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

290. Найти уравненія касательныхъ къ гиперболѣ $x^2 - y^2 = 1$, проходящихъ черезъ точку (−11, 13).

291. Провести параллельно прямой $2x - 3y = 0$ касательныя къ эллипсу $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

292. Параллельно прямой $10x + 3y = 0$ провести касательныя къ гиперболѣ $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

293. Черезъ точку (−1,2) провести касательныя къ параболѣ $y^2 = 5x$.

294. Найти разстояніе отъ фокуса параболы $y^2 = 2px$ до касательной, составляющей уголъ α съ осью параболы.

295. Найти уголъ, составляемый осью параболы съ касательной въ точкѣ пересѣченія перпендикуляра изъ фокуса къ оси параболы.

296. Найти пересѣченіе линіи центровъ совокупности прямыхъ $3x^2 - 12xy + 12y^2 + 4x - 8y + 1 = 0$ съ касательной къ кривой $x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 1 = 0$ въ ея вершинѣ.

297. Доказать, что площадь, заключенная между касательной къ гиперболѣ и ея асимптотами, имѣетъ постоянную величину.

298. Показать, что въ гиперболѣ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ произведеніе разстояній фокусовъ отъ касательной равно b^2.

299. Показать аналитически, что въ эллипсѣ или гиперболѣ разстояніе отъ отраженія одного фокуса въ касательной до другого фокуса равно длинѣ оси $2a$ (въ случаѣ гиперболы — веществ. оси). *Указаніе.* Уравненіе касательной взять подъ видомъ $y = mx + n$.

300. Показать, что длина прямой, идущей отъ центра къ касательной параллельно одному изъ радіусовъ-векторовъ, соединяющихъ точку касанія съ фоку-

сами, равна длинѣ большой полуоси въ эллипсѣ и длинѣ вещественной полуоси въ гиперболѣ.

301 Доказать что произведение отрѣзковъ сѣкущей между асимптотами и точкой на гиперболѣ равно квадрату полудіаметра, параллельнаго сѣкущей

302. Доказать, что произведеніе отрѣзковъ двухъ параллельныхъ касательныхъ отъ точекъ касанія до точекъ пересѣченія съ нѣкоторой третьей касательной есть величина постоянная, равная квадрату полудіаметра, параллельнаго даннымъ касательнымъ. *Указаніе* За координатныя оси взять діаметръ параллельный касательнымъ и съ нимъ сопряженный

303. Доказать, что произведеніе отрѣзковъ, отсѣкаемыхъ отъ касательной двумя взаимно сопряженными діаметрами есть величина постоянная, равная квадрату діаметра, параллельнаго касательной.

304. Доказать, что въ случаѣ, когда ось OX нѣкоторая ось симметріи, произведеніе длины нормали въ точкѣ M на перпендикуляръ, опущенной изъ центра на касательную въ точкѣ M, равно квадрату другой полуоси.

305. Доказать, что произведеніе разстояній фокусовъ отъ касательной равно квадрату полуоси, не содержащей фокусовъ.

306. Доказать, что хорды гиперболы дѣлятъ пополамъ отрѣзки асимптотъ, вырѣзанные касательными въ концахъ хорды.

307. Нормаль въ точкѣ M къ эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ пересѣкаетъ малую ось въ точкѣ P. Если F фокусъ, то отношеніе $\frac{\text{дл. } MP}{\text{дл. } PF}$ постоянно.

308 Нормаль въ точкѣ M къ эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ пересѣкаетъ большую ось въ точкѣ N Если F фокусъ, то отношеніе $\frac{\text{дл. } FN}{\text{дл. } FM}$ постоянно.

309. Доказать, что отрѣзокъ, отсѣкаемый отъ оси параболы полярами точекъ M_1 и M_2, равенъ отрѣзку, отсѣкаемому отъ оси перпендикулярами на ось изъ M_1 и M_2.

310. Въ кривой 2 го порядка перпендикуляръ, опущенный изъ фокуса на хорду и діаметръ, сопряженный съ хордой, пересѣкаются на директрисѣ

311 Если ординаты трехъ точекъ параболы составляютъ геометрическую прогрессію, то касательныя въ концахъ 1 ой и 3 ей ординатъ пересѣкаются на второй

312. Найти уравненіе касательной къ гиперболѣ по даннымъ $C(1,1)$, $F\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{5}{2}\right)$ и точкѣ касанія $x_0=2+\sqrt{\frac{3}{2}}$, $y_0=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$. $\theta=90^\circ$.

313. Найти уравненіе гиперболы по даннымъ $C(1,1)$, $F\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{5}{2}\right)$ и уравненію касательной $x(1-\sqrt{3})+y(1+\sqrt{3})-4=0$, $\theta=90^\circ$.

314 Дана гипербола $xy=k^2$, отнесенная къ асимптотамъ. Составить уравненіе касательной къ гиперболѣ въ точкѣ (x_0, y_0). *Указаніе* Отрѣзки касательной между асимптотами и точкою касанія—равны

315. Зная что общее уравненіе касательной въ точкѣ (x_0, y_0) къ гиперболѣ $xy=k^2$, отнесенной къ асимптотамъ, есть $xy_0+yx_0=2k^2$, найти координаты точки пересѣченія касательныхъ въ точкахъ (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

316 Провести черезъ точку (x_1, y_1), не лежащую на эллипсѣ или гиперболѣ, $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$, нормаль къ эллипсу или гиперболѣ.

317. Въ гиперболѣ $x^2-y^2=1$ взять за новую ось X_1 нормаль, а за новую ось Y_1 — касательную въ точкѣ $x_0=\sqrt{\frac{5}{2}}$, $y_0=\sqrt{\frac{3}{2}}$, приписавъ новымъ осямъ такія направленія, чтобы новыя координаты центра были отрицательны.

318. Найти геометрическое мѣсто точекъ касанія касательныхъ проведенныхъ изъ начала къ параболѣ $\{(x-a)^2+y^2-b^2\}(1+m^2)-(y-mx)^2=0$ (перемѣнный параметръ).

319. Найти координаты точки пересѣченія двухъ касательныхъ въ параболѣ $y^2=2qx$ въ точкахъ (x_1, y_1) и (x_2, y_2) въ функціи отъ y_1, y_2 и q Парабола $y^2=2qx$ отнесена къ діаметру и касательной

320 Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, касающихся оси OY и круга $x^2 + y^2 = 1$.

321 Найти геометрическое мѣсто проекцій фокуса на касательныя къ эллипсу или гиперболѣ $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$.

322. Найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокуса параболы на касательныя

323 Найти точку пересѣченія поляръ точекъ, расположенныхъ на директрисѣ

324. Найти такую точку на прямой $y = 2x + 1$, чтобы поляра ея по отношенію къ эллипсу $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ проходила черезъ точку (1,1).

325. Касательныя къ кругу $x^2 + y^2 = a^2$ разсматриваются какъ поляры эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; на какой линіи лежатъ соотвѣтствующіе этимъ полярамъ полюсы?

326 На отрѣзкѣ длины $2a$, какъ на большей оси построена система эллипсовъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (b перемѣнное) прямая $Ax + By + C = 0$ разсматривается, какъ поляра для каждаго эллипса. На какой линіи лежатъ полюсы?

327. Для параболы $y^2 = 2px$ найти геометрическое мѣсто проекціи фокуса на нормали.

328 Показать, что если окружности, построенныя на хордахъ параболы, какъ на діаметрахъ, касаются директрисы, то всѣ эти хорды проходятъ черезъ постоянную точку *Указаніе.* За параметры взять ординаты y_1 и y_2 концовъ хорды.

329. Показать, что если въ параболѣ $y^2 = 4x$ длины двухъ касательныхъ, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ, суть a и b, то справедливо соотношеніе

$$a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = 1.$$
$$b^{\frac{4}{3}} \quad a^{\frac{4}{3}}$$

330 Даны три точки $O(0\,0)$, $B(x_1, y_1)$ и $C(x_2, y_2)$ Найти г. м точекъ касанія прямыхъ, ныхъ оси OX, съ линіями 2 го порядка, проходящими черезъ точки B и C и касающимися оси OX въ точкѣ O

331. Даны софокусныя линіи $\frac{x^2}{a^2 + h} + \frac{y^2}{b^2 + h} = 1$, h перемѣнно. Найти г. м точекъ касанія касательныхъ даннаго направленія.

332 Нормаль къ параболѣ въ точкѣ M пересѣкаетъ ея ось въ точкѣ P Продолживъ нормаль на отрѣзокъ $PM' = MP$, найти г. м точекъ M'.

333 Равнобочная гипербола, проходящая черезъ начало, имѣетъ асимптотою прямую $x + y + 1 = 0$. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія второй асимптоты съ касательною въ началѣ координатъ.

334. Найти г. м. точекъ, изъ которыхъ эллипсъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ видѣнъ подъ прямымъ угломъ.

335. Найти г м. точекъ изъ которыхъ парабола $y^2 = 2px$ видна подъ угломъ α

336. Найти геом. мѣсто точекъ, изъ которыхъ парабола видна подъ прямымъ угломъ

Примѣчаніе. Угломъ, подъ которымъ видна кривая 2 го порядка изъ нѣкоторой точки, называется уголъ между касательными, проведенными къ кривой изъ этой точки

337 Найти геометрическое мѣсто точекъ изъ которыхъ можно провести къ параболѣ двѣ нормали подъ прямымъ угломъ.

338 Даны двѣ параболы $y^2 = 2px$; $y^2 = 2p(x - a)$. Доказать что хорды первой, касающіяся второй, дѣлятся пополамъ точкой касанія

339 Двѣ параболы имѣющія общую ось симметріи, пересѣчены рядомъ прямыхъ, ||-ныхъ оси симметріи. Доказать что точки пересѣченія хордъ параболъ, соединяющихъ точки пересѣченія любыхъ двухъ діаметровъ съ параболами, лежатъ на одной прямой

Черт 16.

340 Прямой уголъ, вершина M котораго находится на линіи 2-го порядка, вра-

ОТДѢЛЪ II.

Аналитическая геометрія въ пространствѣ.

Координаты.

1. Вычислить опредѣлитель $\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ c & 1 & a \\ b & a & 1 \end{vmatrix}$, гдѣ a, b и c суть косинусы угловъ, составляемыхъ прямою съ прямоугольными коорд. осями.

2. Найти наименьшій уголъ между діагоналями прямоугольнаго параллелепипеда, соединяющими противоположныя вершины Ребра параллелепипеда суть $2a$, $2b$ и $2c$, причемъ $a > b > c$.

3. Найти разстояніе между точками M (1,1, 2), M_2 (2,1, 1). Углы между осями координатъ $XOY = 60^0$, $XOZ = YOZ = 90^0$.

4. Найти *cosinus* угла между прямыми, расположенными въ плоскостяхъ XOY и ZOX и дѣлящихъ соотвѣтственно углы XOY и ZOX пополамъ. Оси координатъ прямоугольны

5. Найти объемъ параллелепипеда, ребра котораго 1 1, 2, а плоскіе углы, образующіе нѣкоторый трехгранный уголъ, равны 120^0, 150^0 и 60^0

6. Найти точку M на прямой, соединяющей точки M_1 (1,2, -1) и M_2 (1,2, 1), не лежащую между точками M_1 и M_2 и такую, что $\frac{\text{дл. } M_1M}{\text{дл. } MM_2} = 2$.

7. Взявъ стороны правильнаго тетраедра за координатныя оси, найти координаты серединъ его реберъ, проекцій вершинъ на противоположныя грани. (Длина сторонъ тетр. $= 1$).

8. Найти точки A, B, C на трехъ координатныхъ плоскостяхъ такъ, чтобы тетраедръ $OABC$ (O начало былъ правильный съ длиною ребра l.

9. На осяхъ координатъ даны точки A, B, C на разстояніи 1 отъ начала 0. За новыя оси берутъ прямую BA, перпендикуляръ изъ C на BA въ плоскости ABC и перпендикуляръ къ этой плоскости. Составить формулы для перехода.

10. Преобразовать ур-ніе $x^2+y^2+2z^2+2xy \quad 2z\sqrt{2}\,(x+y) = a^2$, взявъ за новыя оси OX', OY' и OZ, гдѣ OX' образуетъ съ OX и OY углы въ $\frac{\pi}{3}$ и острый уголъ съ OZ, OY' образуетъ съ OX уголъ въ $\frac{\pi}{4}$ и тупой уголъ съ OY. Всѣ оси координатъ прямоугольны.

11. По какимъ кривымъ пересѣкаются цилиндры $x^2 + 2y^2 = a^2$, $x^2 + 2z^2 = a^2$?

12. Найти г. м. точекъ, равноудаленныхъ отъ точекъ $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$. Оси координатъ прямоугольны

13. Найти г. м. точекъ, разстоянія которыхъ до двухъ данныхъ точекъ находятся въ постоянномъ отношеніи, и доказать, что искомое геометрическое мѣсто точекъ сфера.

14. Найти координаты центра и радіусъ шара $x^2 + y^2 + z^2 \quad 2x \quad 2y - 2z + 2 = 0$.

15. Найти точки пересѣченія поверхностей $2x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

Плоскость.

16 Взявъ ребра тетраедра за координатныя оси, найти ур-нія плоскостей, проходящихъ черезъ ребро и середину противоположной стороны, и доказать, что эти шесть плоскостей пересѣкаются.

17. Найти ур-ніе плоскости, проходящей черезъ точки M_1 (2,1,1), M_2 (—1,2,1) и M_3 (2,2,1).

18. Найти ур-нія сторонъ тетраедра, вершины котораго въ точкахъ M_1 (1,1,1), M_2 (—1,1,1), M_3 (1,—1,1) и M_4 (1,1,—1).

19. Найти ур-ніе плоскости, проходящей черезъ точку M (1,2,1) и образующей на осяхъ OX и OY отрѣзки, соотвѣтственно равные 2 и —3.

20. Найти углы, образованные перпендикуляромъ къ плоскости $x - 2y + z - 1 = 0$ съ осями координатъ.

21. Опредѣлить линейный уголъ, измѣряющій тотъ двугранный уголъ между плоскостями $2x + 2y - z - 1 = 0$, $x + 4y + z + 1 = 0$, въ которомъ лежитъ точка M (1,1,1).

22. Черезъ точку M (1,—1,1) провести плоскость, перпендикулярно къ плоскостямъ $x - y + z - 1 = 0$, $2x + y + z + 1 = 0$.

23. Черезъ точки M (1,1,1) и M_1 (2,2,2) провести плоскость перпендикулярно къ плоскости $x + y - z - 1 = 0$.

24. Черезъ точки M (2,0,0) и M_1 (0,2,0) провести плоскости подъ угломъ въ 45° къ плоскости $x + y + z + 1 = 0$.

25. Узнать, лежитъ-ли начало координатъ внутри тетраедра задачи № 26.

26. Найти объемъ тетраедра, стороны котораго $x + y + z - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x - z - 1 = 0$, $z = -2 = 0$.

27. Вычислить объемъ тетраедра M_1 (1,1,1), M_2 (—1,1,1), M_3 (1,—1,1), M_4 (1,1,—1).

28. Найти разстояніе точки M (2,1,1) отъ плоскости $x + y - z + 1 = 0$.

29. Найти разстояніе между параллельными плоскостями $x - 2y + z - 1 = 0$, $2x - 4y + 2z - 1 = 0$.

30. На оси OZ найти точку, равноудаленную отъ двухъ плоскостей $12x + 9y - 20z - 19 = 0$ и $16x - 12y + 15z - 9 = 0$.

31. Найти ур-ніе плоскости, дѣлящей пополамъ тотъ двугранный уголъ между плоскостями $x + 2y - z - 1 = 0$, $x + 2y + z + 1 = 0$, въ которомъ лежитъ точка M (1,1,1).

32. Найти уравненіе плоскости, расположенной между параллельными плоскостями $x - 2y + z - 1 = 0$, $x - 2y + z - 3 = 0$ и дѣлящей разстояніе между ними соотвѣтственно въ отношеніи 1 : 3.

33. Провѣрить, что плоскости, перпендикулярныя къ ребрамъ тетраедра и дѣлящія ихъ пополамъ пересѣкаются въ одной точкѣ.

34. Найти объемъ тетраедра $x + 2y - z - 2 = 0$, $2x - y + z - 2 = 0$, $x + y - 2z = 0$, $x + y + z - 3 = 0$.

35. Провѣривъ, что плоскости $x + 2y - z - 1 = 0$, $2x - y + 1 = 0$, $x + 2y + 5z + 1 = 0$ взаимно перпендикулярны, взять ихъ соотвѣтственно за новыя плоскости координатъ $X_1O_1Y_1$, $X_1O_1Z_1$ и $Y_1O_1Z_1$, приписавъ новымъ координатнымъ осямъ такія направленія, чтобы новыя координаты стараго начала были положительны. Составить формулы для перехода.

36. Найти общій видъ плоскостей, пересѣкающихъ по равностороннему треугольнику призму, образованную плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$.

37. Найти уравн. шаровой поверхности съ центромъ въ точкѣ (3, 2, 30) и касающейся плоскости $3x + 4y + 12z - \frac{28}{3} = 0$.

38. Найти площадь $\triangle$ка, вершины котораго M (1,—1,1), M_1 (2,1,—1) и M_2 (—1, 1,—2).

39. Провести плоскость, касательную къ параболѣ $\left\{\begin{matrix} y^2 = 2px \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$ и эллипсу $\left\{\begin{matrix} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ такъ, чтобы эта плоскость коснулась параболы въ точкѣ съ данной абсциссой $x_0 = a$.

40. Въ уравненіи плоскости $x + y + lz = 0$ опредѣлить l изъ того условія, чтобы черезъ ось OX можно было бы провести только одну плоскость, составляющую съ первой плоскостью уголъ въ 330°.

41. Найти коэффиціенты A и B въ общемъ уравненіи плоскости $A(x - a) + B(y - b) + z - c = 0$, проходящей черезъ данную точку M (a, b, c) подъ условіемъ, чтобы эта плоскость касалась двухъ параболъ $\left\{\begin{matrix} y^2 = 2px \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$ и $\left\{\begin{matrix} z^2 = 2qx \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$.

42. Черезъ точку (1, 4, 1) провести плоскость, касающуюся параболъ $y = 0$, $z^2 = 8x$ и $z = 0$, $y^2 = 32x$.

84. Составить уравн. конической поверхности, вершина которой есть начало координатъ, а направляющая задана ур-ніями $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ и $x + y = 3z$ 1.

85. Составить уравн. цилиндрич поверхности, образующія которой перпендикулярны къ плоскости, проходящей черезъ прямыя: $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$, $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$, а направляющая задана уравненіями $x = 1$ и $2y^2 + 3z^2 = x$.

86. Составить уравн конической поверхности, вершина которой есть точка (1,1,1), а направляющая задана ур-ніями $3y^2 + 2z^2 = x$ и $2x - y - z = 3$.

87. Найти г. м. перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки M (0,0,1) на образующія конической поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

88. Найти геометрическое мѣсто перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки M (x_0, y_0, z_0) на образующія конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ 0.

89. Найти ур-ніе цилиндрической поверхности, образующія которой параллельны прямой $x = y = z$ и направляющая которой эллипсъ, расположенный въ плоскости XOZ, ур-ніе котораго относительно осей ZOX $x^2 + 4z^2 = 1 - 0$.

90. Найти ур-нія коническихъ поверхностей, вершины которыхъ въ точкѣ M (1,1,1), а направляющія суть соотвѣтственно *a*) парабола, расположенная въ плоскости XY, ур-ніе которой относительно осей YOX $x^2 + 4y^2 + 4xy - 6x - 2y + 3 = 0$, *b*) гипербола, расположенная въ плоскости YZ ур-ніе которой относительно осей YOZ $4y^2 + 4z^2 - 10yz = 2y + 2z + 3 = 0$, и *c*) эллипсъ, расположенный въ плоскости XZ, ур-ніе котораго относительно осей XOZ: $x^2 + 4z^2 - 6x + 2z + 3 = 0$.

91. Найти поверхность, образуемую движеніемъ прямой, которая пересѣкаетъ кругъ $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$ и прямыя $y = 0$, $z = h$, $x = 0$, $z = h$.

92. Найти уравненіе конической поверхности, вершина которой есть точка M (x_0, y_0, z_0), а направляющая $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.

93. Найти уравненіе поверхности, описанной прямою, которая, оставаясь параллельною плоскости XY, скользитъ по оси OZ и по кривой $x = r \cos(\alpha z)$, $y = r \sin(\alpha z)$.

94. Найти уравненіе поверхности, описанной прямою, которая, оставаясь параллельною плоскости XY, скользитъ по оси OZ и по кривой $x = a$, $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

95. Найти уравненіе поверхности, описанной прямою, которая, оставаясь параллельною плоскости $x + y + z = 0$, скользитъ по оси OZ и по кругу $\left\{ \begin{matrix} y^2 + z^2 = a^2 \\ x = b \end{matrix} \right\}$.

96. Найти уравненіе поверхности, образуемой движеніемъ прямой, которая пересѣкаетъ кругъ $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ и прямыя: $x + 1 = 0$, $y = 0$; $x = 1$, $y = z$.

97. Найти геометрическое мѣсто прямыхъ, пересѣкающихъ прямыя $y = 1$, $z = 1$, $x = 1$, $z = 0$ и эллипсъ $x^2 + z^2 = 1$, расположенный въ плоскости XOZ.

98. Прямая перемѣщается такъ, что 3 отмѣченныя на ней точки движутся соотвѣтственно по 3-мъ координатнымъ плоскостямъ, взаимно перпендикулярнымъ. Одно изъ положеній прямой есть $x = 2 - y = 1 - z$. При этомъ положеніи координаты нѣкоторой точки P прямой суть (1,3,2). Найти геометрическое мѣсто точки P.

Указаніе Разстояніе точки P отъ любой изъ 3-хъ другихъ движущихся точекъ—постоянно.

99. Составить уравненіе конической поверхности вращенія, для которой оси OX, OY, OZ образующія.

100. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія трехъ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ, которыя пересѣкаютъ параболу $z = 0$, $y^2 = 2px$.

Указаніе. Ввести въ разсмотрѣніе *Cosinus*'ы угловъ прямыхъ съ координатными осями.

101. Даны плоскость и двѣ сферы, имѣющія центры на плоскости. Перемѣнная сфера касается плоскости и двухъ данныхъ сферъ. Найти 1°) геометрическое мѣсто центра этой сферы; 2°) геометрическое мѣсто точки касанія ея съ плоскостью.

102. Прямая перемѣщается, опираясь на двѣ данныя прямыя и оставаясь параллельной данной плоскости. Найти геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ отрѣзокъ движущейся прямой между данными прямыми въ данномъ отношеніи.

103. Найти уравненіе поверхности, образуемой вращеніемъ прямой $x = 2z + 1$, $y = z - 1$ около оси OZ.

104. Найти поверхность, образованную движеніемъ прямой, которая пересѣкаетъ прямыя. $x = 1$, $y = 0$ и $x = y = z$ и составляетъ съ ними равные углы.

105. Даны двѣ плоскости A и B. Изъ точки O на линіи ихъ пересѣченія проводятся прямыя OC и OD соотвѣтственно въ плоскостяхъ A и B, составляющія между собой прямой уголъ. Найти поверхность, образуемую линіей OE, перпендикулярной къ плоскости COD.

106. Найти поверхность, образуемую движеніемъ прямой, которая пересѣкаетъ двѣ равныя окружности, расположенныя въ параллельныхъ плоскостяхъ и перпендикуляръ, опущенный на эти плоскости изъ середины линіи, соединяющей центры окружностей.

107. Изъ точекъ данной прямой опускаются перпендикуляры на двѣ другія данныя прямыя. Найти поверхность, описываемую линіей, соединяющей основанія этихъ перпендикуляровъ.

108. Найти геометрическое мѣсто прямыхъ, проходящихъ черезъ данную точку и образующихъ съ двумя данными направленіями углы, сумма которыхъ постоянна.

109. Найти поверхность, образованную движеніемъ прямой, которая пересѣкаетъ параболы: $y^2 = 2x$, $z = 0$ и $z^2 = -2x$, $y = 0$, оставаясь параллельной плоскости $y - z = 0$.

110. Найти поверхность, образованную движеніемъ прямой, опирающейся на прямыя $x = 1$, $y = 1$, $x = -1$, $z = 0$ и касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

111. Черезъ прямую $x = y = z$ провести плоскость такъ, чтобы линіи пересѣченія ея съ плоскостями $y = 2x = 0$ и $y = 0$ были перпендикулярны.

112. Найти уравненіе поверхности, образуемой прямой, двѣ опредѣленныя точки которой скользятъ по двумъ перпендикулярнымъ непересѣкающимся прямымъ.

113. Отрѣзокъ неизмѣнной длины скользитъ концами по двумъ непересѣкающимся прямымъ. Найти геом. мѣсто его середины.

114. Найти поверхность, образованную движеніемъ круга, плоскость котораго параллельна плоскости $x + y = 0$ и который пересѣкаетъ ось OX, ось OY и прямую $y = x$, $z = a$.

115. Найти геометрическое мѣсто центровъ сферъ, касающихся прямыхъ $z = +2$, $x + y = 0$, $z = -2$, $x - y = 0$.

116. Шаръ перемѣннаго радіуса касается двухъ данныхъ неподвижныхъ непересѣкающихся перпендикулярныхъ прямыхъ. Найти геометрическое мѣсто его центра.

Указаніе. Начало коорд. помѣстить въ серединѣ кратчайшаго разстоянія $2c$ между данными прямыми и ось OZ направить по этому направленію, а оси OX и OY — параллельно даннымъ прямымъ.

117. Найти уравненіе круговой цилиндрической поверхности, проходящей черезъ прямыя $x = y = z$, $x + 1 = y = z - 1$, $x - 1 = y + 1 = z - 2$.

118. Найти уравненіе круговой цилиндрической поверхности, касающейся плоскостей $x + y + z = 0$, $x - y + z = 0$, $x + 5y + z + 1 = 0$.

Поверхности 2-го порядка. (Центръ, діаметральныя плоскости и т. д.).

119. Найти общее ур-ніе поверхностей 2-го порядка, пересѣкаемыхъ плоскостью YOY по кривой $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\eta y + \lambda = 0$.

120. Найти ур-ніе поверхности 2-го порядка, на которой лежатъ круги.
1) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$.

121. Черезъ начало координатъ провести прямыя асимптотическаго направленія для поверхности $x^2 - 2y^2 + 4xy - 10xz - 4yz + x - z - 1 = 0$ и параллельныя плоскости $3x + y - 4z - 3 = 0$.

122. Показать, что ур-нію $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2y + 1 = 0$ удовлетворяютъ только точки, лежащія на прямой $x - y + z - 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$.

123. Показать, что уравненію $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y - 2z + 3 = 0$ удовлетворяютъ только координаты точки $M(-1, 1, 1)$.

124. Найти прямыя, по которымъ поверхность конуса $z^2 - 2xy - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$ пересѣкается съ плоскостью $x + y + 2z + 5 = 0$.

125. Найти прямыя, цѣликомъ лежащія на поверхностяхъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$.

126. Черезъ точки (0, 2,2) и (- 1,0,0) провести плоскости, пересѣкающія конусъ $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ по параболамъ.

127. Найти г. м. касательныхъ къ поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, проведенныхъ изъ точки $M(x_0, y_0, z_0)$.

128. Найти центръ поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz + 6xz + 2x - 6y - 2z = 0$. Преобразовать уравненіе, перенеся начало координатъ въ центръ.

129. То-же для: $4xy + 4xz - 4y - 4z - 1 = 0$.

130. То-же для: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$.

131. Составить общее ур-ніе поверхностей, имѣющихъ центръ въ точкѣ $M(x_0, y_0, z_0)$.

132. Найти геом. мѣсто центровъ поверхностей $x^2 + y^2 - z^2 + 2pxz + 2qyz - 2ax - 2by + 2cz = 0$ (p и q перемѣнные).

133. Найти геометрическое мѣсто центровъ поверхностей 2-го порядка, проходящихъ черезъ данный эллипсъ и черезъ двѣ точки, расположенныя симметрично относительно плоскости эллипса.

134. Найти г. м. центровъ поверхностей, заключающихъ данный кругъ и прямую, пересѣкающую плоскость круга.

Указаніе. Оставляя оси косоугольными, взять данную прямую за ось OZ, плоскость круга за плоскость XY, направивъ ось OX черезъ центръ круга.

135. Найти уравн. прямыхъ, проходящихъ черезъ центръ поверхности $x^2 + 4y^2 - 40z^2 + 4x - 8y - 16z - 12 = 0$ и пересѣкающихъ ее въ двухъ точкахъ, удаленныхъ въ безконечность.

136. Изъ центра поверхности $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x + 8y + 3 = 0$ опустить перпендикуляръ на ось Z-овъ.

137. Найти діаметральную плоскость поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$, сопряженную съ прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{0}$.

138. Найти діаметральную плоскость поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$, параллельную плоскости $x + y + z + 1 = 0$.

139. Найти ур-ніе діаметральной плоскости поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2y + 2xz - 4x - 1 = 0$, проходящей черезъ точки O (0,0,0) и M (1,1,1) и ур-нія хордъ, съ которыми она сопряжена.

140. Найти ур-ніе діаметральной плоскости поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2x - y + 1 = 0$, проходящей черезъ точки O (0, 0, 0) и M (1, 1, 1) и ур-нія хордъ, съ которыми она сопряжена.

141. Найти ур-ніе діаметральной плоскости поверхности $x^2 + z^2 - 2x + 1 = 0$, проходящей черезъ точку M (2,1,0) и ур-нія хордъ съ нею сопряженныхъ.

142. Найти діаметральную плоскость поверхности $4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 2yz + x - y - 1 = 0$, проходящую черезъ начало координатъ.

143. Найти ур-ніе діаметра поверхности $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz + 8y - 4z + 3 = 0$, перпендикулярнаго къ плоскости XOZ.

144. Найти ур-ніе діаметральной плоскости поверхности $x^2 - xy + 2yz + x - z = 0$, проходящей черезъ точку M (1, 1, 1) и сопряженной съ прямою, параллельной плоскости $Z = 0$.

145. Найти геом мѣсто серединъ хордъ поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, проходящихъ черезъ точку $M(x_0, y_0, z_0)$.

146. Плоскость $x = 0$ есть діаметральная плоскость поверхности $xy = z$. Найти хорды съ которыми она сопряжена.

147. Зная, что плоскость $x - 1 = 0$ діаметральная плоскость поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2yz - 2x + y + 1 = 0$, найти ур-нія хордъ съ которыми она сопряжена.

148. Зная, что плоскость $x + z - 2 = 0$ діаметральная плоскость поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2xz - 4x - 1 = 0$, найти хорды, съ которыми она сопряжена.

149. Принявъ за ось O_1Z_1 діаметръ поверхности $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2x + 6y - 2z = 0$, соотвѣтствующій плоскости $2x - y + 3z = 0$, и зная, что ось O_1X_1 отсѣкаетъ отъ оси OX отрѣзокъ равный 1, составить уравн. новыхъ плоскостей координатъ. Новыя оси прямоугольны.

150. Найти діаметральную плоскость, общую поверхностямъ: $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$ и $x^2 + 4z^2 - 4xz + x - y + z = 0$.

151. Найти діаметральную плоскость, общую поверхностямъ: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2z = 0$ и $x^2 + y + z = 0$.

152. Найти ур-ніе диаметра поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$ соотвѣтствующаго плоскости $x + y + z + 1 = 0$.

153. Найти г. м. центровъ центральныхъ кривыхъ, расположенныхъ на поверхности $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2x - 2z - 1 = 0$ и въ плоскостяхъ, параллельныхъ плоскости $x - y + z + 1 = 0$.

154. Зная, что прямая $\frac{x-3}{1} = \frac{z-1}{-1} = \frac{y-2}{0}$ одинъ изъ діаметровъ поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0$, найти ур-нія плоскостей, ему соотвѣтствующихъ.

155. Зная, что прямая $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ одинъ изъ діаметровъ поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2x - y + 1 = 0$, найти ур-нія плоскостей, ему соотвѣтствующихъ.

156. Составить уравн. діаметра поверхности $4x^2 + 7y^2 - 10xy + 4xz - 19yz + 8x + 4y + 2z = 0$, сопряженнаго съ діаметральной плоскостью, отсѣкающей отъ координатныхъ осей равные отрѣзки.

157. Найти уравн. діаметра поверхности $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + 2x - 6y - 2z = 0$, сопряженнаго съ діаметральною плоскостью, перпендикулярною къ прямой $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12}$.

158. Найти г. м. центровъ кривыхъ, получаемыхъ при пересѣченіи поверхности $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2x + 6y - 2z = 0$ плоскостями, параллельными плоскости $2x - y + 3z - 1 = 0$, найти точку наименѣе удаленную отъ оси Z-овъ.

159. Найти геом. мѣсто центровъ кривыхъ, получаемыхъ отъ пересѣченія поверхности $2x^2 + y^2 - z^2 - 2xy - x + z - 1 = 0$ плоскостями, перпендикулярными къ оси Z.

160. Кругъ радіуса R касается оси OY въ началѣ координатъ и расположенъ въ плоскости XOY. Другой кругъ того же радіуса расположенъ въ плоскости $x - \lambda z = 0$ и касается оси OY въ началѣ. Найти уравненіе цилиндрической поверхности, проходящей черезъ эти круги.

161. Найти г. м. хордъ поверхности $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0$ имѣющихъ середину въ точкѣ $M(x_0, y_0, z_0)$.

Упрощеніе ур-ній поверхностей 2-го порядка.

162. Найти плоскость симметріи поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - x + 4y - z + 2 = 0$.

Упростить ур-нія поверхностей, составить формулы для преобразованія координатныхъ осей и т. д.

163. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4y + 3 = 0$.

164. $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + 2x - 6y - 2z + 1 = 0$

165. $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + 2x - 6y - 2z = 0$.

163 $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$.

167. $6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4x - 8y - 8z + 5 = 0$.

168. $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0$.

186. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z - 0$

170. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y + 2 = 0$.

171. $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz + 10x - 4y - 2z + 4 = 0$.

172. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 4x - 2y = 0$.

173. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z = 0$.

174. $y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2y = 0$.

175. $2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0$.

176. $3x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y - 4z = 0$.

177. $x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 8yz + 2x + 2y + 4z = 0$.

178. $3x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6yz - 3x - y - 4z + 1 = 0$.

179. $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$.

160. $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz + 4yz + 3x - y - 2z = 0$.

181. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + x + y - z = 0$

182. $3y^2 - 4x - 4y + 4z = 0$.

183. $x^2 - yz + 1 = 0$.

184. $x^2 + y^2 - z^2 + 2\lambda xz + 2yz = 0$.

185. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$.

186. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - x - 4y - z + 2 = 0$.

187. Составить уравн. г. м. вершинъ поверхностей $4y^2 - 2z^2 + x + 2Hy + 2Jz = 0$.

188. Найти уравн. прямой, проходящей черезъ вершину поверхности $5x^2 + 5z + 2x - 4y - 10z = 0$ и отсѣкающей отъ OX отрѣзокъ равный 2.

189 Уравн. поверхности $xy + xz + zy - x = 0$ отнести къ осямъ симметрии.

190. Упростить ур-нія поверхностей. $2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 4x + 2y + 1 = 0$.

191. $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$.

192. $7x^2 - 13y^2 + 6z^2 + 24xy - 12xz + 12yz + 54 = 0$

Указание $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -14$, $\lambda_3 = 21$.

193 $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x + 4y - 3z + 2 = 0$.

194. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x + 4y - 3z + 2 = 0$.

195 $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz + 4yz + 10x + 2y - 2z + 4 = 0$.

196 $x^2 + y^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1$.

197 Опредѣлить λ и μ такъ, чтобы уравненіе $x^2 - y^2 + 3z^2 + (\lambda x + \mu y - 1 = 0$ представляло цилиндръ вращенія

198. Найти условіе, при которомъ поверхность $a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2xz) + c(z^2 + 2xy) = 1$, будетъ поверхностью вращенія

199 Доказать, что всѣ поверхности $y^2 + (z^2 - 2z)(1 - \lambda^2 + 2\lambda x) - 2a = 0$ — поверхности вращенія и опредѣлить положеніе оси вращенія.

200. Опредѣлить λ такъ, чтобы конусъ $x^2 - 2xy + \lambda z^2 = 0$ былъ конусомъ вращенія и опредѣлить уравненіе оси вращенія

201. Изслѣдовать характеръ поверхности $x^2 + (2m^2 + 1)(y^2 + z^2) - 2xy - 2xz - 2yz - 2m^3 - 3m + 1$ при измѣненіи m отъ $-\infty$ до $+\infty$.

202. При какомъ соотношеніи между параметрами λ и μ уравненіе $x^2 + y^2 - z^2 + 2\lambda xz + 2\mu yz - 2x - 4y + 2z - 1 = 0$ представляетъ коническія поверхности? Найти геометрическое мѣсто центровъ этихъ коническихъ поверхностей

203. Найти и упростить уравн. г. м центровъ поверхностей. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 2Dxy + 2Exz - 2yz + 2x - 2y + 4z + 1 = 0$.

204 Доказать, что конусъ съ вершиной въ точкѣ (1 0,0) и направляющей $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 - x = 0$ есть конусъ вращенія и опредѣлить ось вращенія.

205. Найти и упростить уравненіе поверхности, представляющей геометрич. мѣсто точекъ внѣ куба, произведеніе разстояній которыхъ отъ трехъ сходящихся граней куба равно произведенію разстояній отъ трехъ противоположныхъ его граней.

Указание: Начало координатъ расположить въ центрѣ куба съ ребромъ $2a$, координатныя плоскости направить параллельно гранямъ куба; сходящіяся грани куба взять въ 1 и 8-мъ углахъ, кубъ расположенъ внутри искомаго геом. мѣста

206. Найти и упростить геом мѣсто центровъ поверхностей $x^2 + y^2 - z^2 + 2\lambda xz + 2\mu yz - 2ax - 2by + 2cz = 0$ при произвольныхъ λ и μ.

207. Найти и упростить геом. мѣсто точекъ, которыхъ разстоянія отъ двухъ данныхъ непересѣкающихся прямыхъ были бы равны между собою.

Указание Нач. коорд —въ серединѣ кратчайшаго разстоянія $2c$ между данными прямыми, ось OZ—по направл. кратч. разст., ось OY параллельно одной изъ данныхъ прямыхъ: $\begin{cases} x = 0 \\ z = c \end{cases}$; угловой коэф. проекціи второй прямой на XOY равенъ k.

208 Даны двѣ прямыя. $\begin{cases} y = mx \\ z = c \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 0 \\ z = c \end{cases}$. Найти (и упростить) геом мѣсто пересѣченій плоскостей, проходящихъ черезъ данныя прямыя и взаимно перпендикулярныхъ

209. Найти и упростить уравненіе геом. мѣста точекъ, которыхъ разстояніе отъ данной прямой ($x = c$, $y = 0$) равны разстоянію отъ начала координатъ.

210. Найти и упростить уравненіе поверхности, происшедшей отъ вращенія прямой $\begin{cases} x = az + b \\ y = a_1 z + b_1 \end{cases}$ вокругъ оси OZ.

Указание. Каждая точка прямой описываетъ окружность вокругъ оси OZ.

211. Найти уравненія осей симметріи и взять ихъ за координатныя оси для поверхности $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ такъ, чтобы одна изъ осей симметріи была перпендикулярна къ оси OZ.

212 Найти уравненіе и опредѣлить видъ поверхности, образуемой прямой линіей, которая встрѣчаетъ двѣ неподвижныя прямыя $\begin{cases} x = 0 \\ z = a \end{cases}$ и $\begin{cases} y = 0 \\ z = a \end{cases}$, оставаясь параллельною плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$. Найти главное направленіе, соотвѣтствующее корню куб. ур., равному нулю.

213 Составить и упростить уравненіе поверхности, представляющей изъ себя выраженіе момента Z въ перемѣнномъ сѣченіи mn балки AB пролетомъ a, свободно

лежащей на двухъ опорахъ и нагруженной грузомъ P въ перемѣнномъ разстояніи y отъ опоры A. Разсмотрѣть случаи, 1) $y > x$, 2) $y < x$ и 3) $y = x$.

Указаніе. Моментомъ въ сѣченіи mn называется произведеніе изъ опорнаго сопротивленія A на разстояніе x до mn, т. е. $Z = Ax$.

214. Эллипс. вращается около большой оси симметріи и образуетъ эллипсоидъ вращенія. Конусъ имѣетъ вершину въ фокусѣ эллипса и основаніемъ плоское сѣченіе эллипсоида. Доказать, что конусъ есть конусъ вращенія

215. Поверхность 2-го порядка имѣетъ плоскости симметріи $x + y + z = 0$, $2x - y - z = 0$, $y - z + 1 = 0$ и проходитъ черезъ точки (0, 0, 0), (1, 1, −1), (0, 0, 1). Найти ея уравненіе

216. Образующія нораболическаго цилиндра параллельны прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$, плоскость $x + y + z = 0$ есть плоскость симметріи и точки (1, 1, 1) и (1, 1, 1) лежатъ на его поверхности. Найти уравненіе поверхности этого цилиндра.

Круговыя сѣченія поверхностей 2-го порядка, прямолинейныя образующія и т. д.

217. Черезъ прямую $2x = 2y = z$ провести плоскость, пересѣкающую поверхность $4x^2 - y^2 + z = 0$ по равнобочной гиперболѣ.

Указаніе. Асимптоты равнобочной гиперболы взаимно перпендикулярны.

218. Найти координаты вершины параболы, получаемой въ сѣченіи цилиндра $y = 2x$ плоскостью $x + y + z = 1$.

219. Черезъ точку (α, β, γ) провести плоскость, пересѣкающую эллипсоидъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ по эллипсу, имѣющему центръ въ той же точкѣ.

220. Найти плоскости, въ которыхъ лежатъ оси симметріи эллипсовъ получаемыхъ въ сѣченіи эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ плоскостями, параллельными плоскости $2x + y + z = 0$

221. Найти уравненіе оси параболы, получаемой въ сѣченіи поверхности $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ плоскостью $x + y = 2z = 1$.

222. Найти плоскости, въ которыхъ расположены оси симметріи кривыхъ пересѣченія поверхности $x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 0$ съ плоскостями, параллельными плоскости $x + y + z = 0$.

223. Найти плоскость, въ которой лежатъ оси симметріи параболъ, получаемыхъ отъ сѣченія поверхности $y^2 + 2z^2 = 2x = 0$ плоскостями, параллельными плоскости $x - z = 0$.

224. Найти геом. мѣсто центровъ сѣченій, происшедшихъ отъ пересѣченія даннаго эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ плоскостями, проходящими черезъ данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$.

Указаніе. Центры сѣченій находятся на плоскости проходящей черезъ данную точку и на соотвѣтствующемъ ей діаметрѣ эллипсоида.

225. Найти геометрическое мѣсто центровъ эллипсовъ, получаемыхъ въ сѣченіи эллипсоида $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ плоскостями, проходящими черезъ прямую $x = y = z$.

226. Найти уравненіе плоскости, проходящей черезъ начало координатъ и черезъ ось вращенія поверхности $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz + 4y + 3x + 2y + z + 6 = 0$

227. Найти точки пересѣченія поверхности $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 4y = 2z = 0$ и г. м. центровъ ея круговыхъ сѣченій.

228. Найти ур-нія плоскостей, пересѣкающихъ по кругамъ поверхность $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, гдѣ $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = k > 0$.

229. Черезъ точку $M(-1, -1, -1)$ провести плоскости, пересѣкающія поверхность $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + x + 2y + 2z = 0$ по кругамъ

230. Найти г. мѣсто центровъ круговыхъ сѣченій эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 4y - 4z + 2 = 0$.

231. Найти г. м. центровъ круговыхъ сѣченій поверхности $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x = 0$.

232. Найти г. м. центровъ круговыхъ сѣченій поверхности $xy + xz + yz - x - 2y - 3z = 0$.

233. Найти уравн. круговыхъ сѣченій эллипсоида $x^2 + 3y^2 + 12z^2 - 2x - 12y - 72z + 109 = 0$, проходящихъ черезъ точку (0, −1, 3).

ОТДѢЛЪ III

Дифференціальное исчисленіе.

Теорія предѣловъ.

1. $\lim\limits_{x=1} \dfrac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\ldots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^k-1)}$.

2. $\lim\limits_{x=1} \left\{\dfrac{\alpha}{1-x^\alpha} - \dfrac{\beta}{1-x^\beta}\right\}$. Числа α и β цѣлыя > 0

3. Пр. $\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$, пр. $x=0$.

4. Пр $\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$, пр $x=\pi$

5. Пр. $\dfrac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}$, пр. $x=0$.

6. Пр $\left\{\dfrac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}\right\}_{x=0}$

7. Пр. $\left\{\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}\right\}_{x=0}$

8. Пр. $\left(\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}\right)_{x=0}$.

9. Пр. $\left(\dfrac{\sqrt{1-3tgx}-\sqrt[5]{1+2tg^3x}}{\sin x}\right)_{x=0}$.

10. Пр. $\left(\dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}\right)_{x=2}$

11. $\lim\limits_{x=\infty} \left\{\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_k)}-x\right\}$.

12. $\lim\limits_{x=\infty} x^{\frac{3}{2}}\left\{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right\}$

13. $\lim\limits_{x=\infty} \left\{x^{\frac{4}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right\}$.

14. $\lim\limits_{x=\infty} \left\{(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right\}$.

15. $\lim\limits_{x=\infty} \left\{x^3\left\{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right\}\right\}$

16. $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\sqrt[k]{a+x}-\sqrt[k]{a-x}}{x}$.

17. $\lim\limits_{x=0} \dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^m-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$.

18. $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x-a}$, $(a>b)$.

19. Опредѣлить λ и μ подъ условіемъ

$$\lim_{x=+\infty}\left\{\sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i x^2+b_i x+c_i}-\lambda x-\mu\right\}=0,\quad a_i>0.$$

20. Опредѣлить λ и μ подъ условіемъ $\lim\limits_{x=\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu\right)=0$.

21. $\lim\limits_{x=0} \dfrac{tg\,x-\sin x}{x^3}$.

22. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

23. $\lim\limits_{x=\infty} (\sin\sqrt{x}-\sin\sqrt{x-1})$.

24. $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\sqrt[m]{\cos\alpha x}-\sqrt[m]{\cos\beta x}}{x^2}$

25. $\lim\limits_{x=1} (1-x)\, tg\, \frac{\pi x}{2}$.

26. $\lim\limits_{x=0} \frac{1-\cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^3}$

27. Пр. $\left\{\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{3x}\right\}_{x=\infty}$.

28. Пр. $\left\{\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+1}\right\}_{x=\infty}$.

29. Пр. $\left\{\left[1+\frac{Sin\frac{a}{x}-Sin\frac{b}{x}}{p+Sin\frac{b}{x}}\right]^{x}\right\}_{x=\infty}$

30. Пр. $\{(1+3\,tg^2 x)^{Cosec^2 x}\}_{x=0}$.

31. Пр. $\{[1+tg(1+2x)]^{\frac{1}{3x}}\}_{x=0}$.

32. $\lim\limits_{x=0} (1+tg\, px)^{cotg\, qx}$

33. $\lim\limits_{n=\infty} \left\{\frac{a_1^{\frac{1}{n}}+a_2^{\frac{1}{n}}+\ldots+a_k^{\frac{1}{n}}}{k}\right\}^{n}$

34. $\lim\limits_{x=0} \frac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2}-\sqrt[3]{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$, $a>0$

35. $\lim\limits_{x=0} \left\{\frac{arc\,tg\,(1+x)}{arc\,tg\,(1-x)}\right\}^{\frac{1}{x}}$.

36. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{4}} (tg\, x)^{tg\, 2x}$.

37. $\lim\limits_{x=0} \left(\frac{1+xa^x}{1+xb^x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

38. $\lim\limits_{m=\infty} \left(Cos\frac{x}{m}+\lambda\, Sin\frac{x}{m}\right)^{m}$.

39. $\lim\limits_{m=\infty} \cos^m \frac{x}{\sqrt{m}}$.

40. $\lim\limits_{x=0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

41. $\lim\limits_{x=0} \frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{Sin\,\alpha x-Sin\,\beta x}$

42. Пр. $\frac{\log(1+x)}{x}$, при $x=0$.

43. $\lim\limits_{x=0} \frac{\log\cos\alpha x}{\log\cos\beta x}$

44. Пр. $n\,(a^{\frac{1}{n}}-1)$, $n=\infty$.

45. $\lim\limits_{n=\infty} n\,(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}})$.

46. $\lim\limits_{n=\infty} n^2\,(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2)$.

47. $\lim\limits_{x=\infty} \frac{\log(1+e^x)}{x}$

48. $\lim\limits_{n=\infty} n^2 \log\cos\frac{\pi}{n}$

49. $\lim\limits_{n=\infty} n \log tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}\right)$.

50. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{4}} \frac{\log tg\, x}{1-cotg\, x}$.

51. $\lim\limits_{x=+\infty} \frac{\log(1+e^{\alpha x})}{\log(1+e^{\beta x})}$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

52. $\lim\limits_{x=+\infty} \frac{\log x}{x^k}$ $(k>0)$

Указание къ № 52. Положить $x=z^{\frac{1}{k}}$ и воспользовался неравенствомъ $z=e^{\log z}>1+(e-1)\log z$.

53. $\lim\limits_{x=0} x^{\alpha}(\log x)^{\beta}$; $\alpha>0$, $\beta>0$.

54. $\lim\limits_{x=+\infty} x^{\alpha} e^{-x^{\beta}}$, $\alpha>0$, $\beta>0$

55. $\lim\limits_{x=\infty} e^{-x^2}\sqrt{x^{10}+1}$

56. Предполагая, что p цѣлое число $\geqq 0$, доказать равенство,

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$$

57. Доказать, что при цѣломъ $p\geqq 0$ $\lim\limits_{n=\infty} \left\{\frac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right\}=\frac{1}{2}$

58. Найти $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1^p+3^p+\ldots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}$, при $p+1>0$.

59. Найти $\lim\limits_{n=\infty} \left\{\frac{1^p+3^p+\ldots+(2n-1)^p}{n^p}-\frac{2^p n}{p+1}\right\}$, при p цѣломъ $\geqq 0$

60. Доказать слѣдующія неравенства: $s\,b^{s-1}(a-b)\leqq a^s-b^s\leqq s\,a^{s-1}(a-b)$, при $a>b>0$ и $s\geqq 1$.

Указание. Неравенства вытекаютъ изъ формулы Лагранжа, но могутъ быть доказаны элементарно, если ихъ сначала доказать для раціональныхъ s.

При $s = \frac{p}{q}$ они получаются, какъ слѣдствіе неравенства $\frac{x^q - 1}{q} < \frac{x^p - 1}{p}$ при $x > 1$ и цѣлыхъ p и q, удовлетворяющихъ условіямъ $p > q \geq 1$.

61. Доказать при $0 < s < 1$ асимптотическое равенство $1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} = \frac{n^{1-s}}{1-s} + C + \varepsilon_n$ гдѣ C нѣкоторое постоянное, а ε_n число, имѣющее предѣломъ нуль при $n = \infty$.

Указание На основаніи неравенствъ задачи 60 можно доказать, что перемѣнное $\psi(n) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s}$ убываетъ, но остается постоянно больше одного и того же числа.

62. На основ. двухъ предыдущихъ задачъ доказать, что $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1^s + 2^s + 3^s + \ldots + n^s}{n^{s+1}} = \frac{1}{s+1}$ при единственномъ условіи $s + 1 > 0$.

63. Найти $\lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1\right)$.

Указание. Воспользоваться неравенствами $\frac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2}$ при $x + 1 > 0$

64. Найти $\lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k^2}{n^3}} - 1\right)$.

Указание Воспользоваться неравенствами: $\frac{x}{3+x} < \sqrt[3]{1+x} - 1 < \frac{x}{3}$ при $x > 0$.

65. Доказать асимптотическое равенство $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = c + \log n + \varepsilon_n$, гдѣ c нѣкоторое постоянное, а ε_n число, имѣющее предѣломъ нуль при $n = \infty$.

Указание. На основаніи неравенствъ: $\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ доказать, что перемѣнное $\psi(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$ конечное и монотонное

Примѣчание. c называется постоянной Эйлера.

66. Пусть $P_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \ldots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$. Найти $\lim\limits_{n=\infty} P_n$.

Указаніе. Разсмотрѣть $\log P_n$ и воспользоваться неравенствами $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ при $x > 0$.

67. Пусть $P_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Найти $\lim\limits_{n=\infty} P_n$.

Указание. Воспользоваться неравенствами $\frac{1}{n+1} < \log\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$.

68. Пусть $P_n = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha + 1} + \ldots + \frac{1}{n\alpha + n}$ $(\alpha > 0)$ Найти $\lim\limits_{n=\infty} P_n$.

69. Найти $\lim\limits_{n=\infty} P_n$, гдѣ $P_n = \sin\frac{a}{(2n+1)^2} + \sin\frac{3a}{(2n+1)^2} + \ldots + \sin\frac{(2n+1)a}{(2n+1)^2}$.

Указание. Воспользоваться неравенствами: $x > \sin x > x - \frac{x^3}{6}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

70. Найти $\lim\limits_{n=\infty} P_n$ гдѣ $P_n = \cos\frac{a}{n\sqrt{n}} \cos\frac{2a}{n\sqrt{n}} \ldots \cos\frac{na}{n\sqrt{n}}$.

Указание. Разсмотрѣть $\log P_n$.

71. Найти $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{4n} + \cos\frac{3\pi}{4n} + \ldots + \cos\frac{(2n+1)\pi}{4n}\right)$.

72. Полагая $P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, найти предѣлъ P_n при безконечномъ возрастаніи n.

73. Пусть $P_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \dots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$. Найти $\lim\limits_{n=\infty} P_n$.

74. Пусть $P_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$. Найти $\lim\limits_{n=\infty} P_n$

75. Пусть $P_n = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \dots (1 + x^{2^n})$. Предполагая $|x| < 1$, найти $\lim\limits_{n=\infty} P_n$.

76. Пусть $P_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\dots\cos\frac{x}{2^n}$. Найти $\lim\limits_{n=\infty} P_n$.

77. Пусть $P_n = Sh\frac{x}{2}\, Ch\frac{x}{4} \dots Ch\frac{x}{2^n}$. Найти $\lim\limits_{n=\infty} P_n$.

Примѣчаніе. Функція Chx опредѣляется равенствомъ $Chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

78. Послѣдовательность чиселъ $x_0, x_1, \dots$ задается по слѣдующему закону: числа x_0 и x_1 даны; каждое слѣдующее опредѣляется черезъ два предыдущія равенствомъ $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$ $(n \geq 2)$. Найти $\lim\limits_{n=\infty} x_n$.

79. Двѣ послѣдовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$, $b_0, b_1, b_2, \dots$, первые члены которыхъ даны, задаются слѣдующимъ закономъ образованія: $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \frac{a_n + b_{n-1}}{2}$. Выразить a_n и b_n явно черезъ n и найти $\lim\limits_{n=\infty} a_n$, $\lim\limits_{n=\infty} b_n$.

80. Начальные члены двухъ послѣдовательностей $a_0, a_1, a_2, \dots$, $b_0, b_1, b_2, \dots$, a_0 и b_0 даны, причемъ $a_0 > b_0 > 0$. Всѣ остальные опредѣляются по слѣдующему закону: $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$. Выразить a_n и b_n явно черезъ n и найти $\lim\limits_{n=\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n=\infty} b_n$.

81. Послѣдовательныя значенія перемѣннаго x_n связаны соотношеніемъ $x_n = \frac{\alpha x_{n-1} + \beta}{\gamma x_{n-1} + \delta}$, гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ данныя числа, удовлетворяющія условіямъ: $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $(\alpha + \delta)^2 - 4 > 0$, $\gamma \neq 0$. Начальное значеніе x_0 не должно равняться корнямъ ω и ω^1 уравненія $\gamma x^2 + (\delta - \alpha)x - \beta = 0$ и, кромѣ того, подлежитъ ограниченію $\gamma x_0 + \delta \neq 0$. Доказать, что при этихъ условіяхъ $\lim\limits_{n=\infty} x_n$ будетъ равенъ ω или ω^1 въ зависимости отъ того, будетъ ли $|\alpha - \gamma\omega| <$ или $> |\alpha - \gamma\omega^1|$.

Указаніе. Разсмотрѣть отношеніе $\frac{x_n - \omega}{x_n - \omega^1}$.

82. Послѣдовательность значеній перемѣннаго x_n задается слѣдующимъ образомъ: $x_0 = \sqrt{a}$, $x_1 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$, $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$ и т. д. $(a > 0)$. Доказать, что перемѣнное x_n возрастаетъ, но остается постоянно меньше одного и того же числа. Опредѣлить $\lim\limits_{n=\infty} x_n$.

83. Пусть x заданное число, лежащее между 0 и 1. Послѣдовательность значеній перемѣннаго y_n опредѣляется слѣдующимъ образомъ: $y_1 = \frac{x}{2}$, $y_2 = \frac{x}{2} + \frac{y_1^2}{2}, \dots$ $\dots y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2}, \dots$ Доказать, что y_n перемѣнное монотонное и конечное и найти $\lim\limits_{n=\infty} y_n$.

84. Двѣ послѣдовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$, $b_0, b_1, b_2, \dots$ первые члены которыхъ a_0 и b_0 данныя положительныя числа, задаются слѣдующимъ закономъ образованія: $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$. Доказать, что перемѣнныя a_n и b_n приближаются къ общему предѣлу. (*Gauss*,

Гюнтеръ.

85. Двѣ послѣдовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$; $b_0, b_1, b_2, \ldots$, первые члены которыхъ даны, задаются слѣдующимъ закономъ образованія: $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \frac{a^2_{n-1} + b^2_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}$. Доказать, что перемѣнныя a_n и b_n при безконечномъ возрастаніи n стремятся къ общему предѣлу.

86. Двѣ послѣдовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$, $b_0, b_1, b_2, \ldots$, начальные члены которыхъ данныя положительныя числа, задаются слѣдующимъ закономъ образованія: $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$. Доказать, что перемѣнныя a_n и b_n приближаются къ общему предѣлу.

87. Опредѣлить предѣлъ перемѣнныхъ a_n и b_n, происхожденіе которыхъ объяснено въ предыдущей задачѣ. Указаніе. При $0 < a_0 < b_0$ слѣдуетъ положить $a_0 = b_0 \cos\varphi$; при $0 < b_0 < a_0$ слѣдуетъ положить $a_0 = b_0 \operatorname{ch}\varphi$.

88. Пусть заданное число x удовлетворяетъ условіямъ $0 < x < 1$. Доказать, что перемѣнное y_n, послѣдовательность значеній котораго опредѣляется такъ: $y_1 = \frac{x}{2}$, $y_2 = \frac{x}{2} - \frac{y_1^2}{2}$, $y_3 = \frac{x}{2} - \frac{y_2^2}{2}$ и т. д., сходящееся и найти $\lim\limits_{n=\infty} y_n$.

89. Послѣдовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$, гдѣ x_0 произвольное число, задается слѣдующимъ закономъ образованія: $x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}$, гдѣ m и ε $(0 < \varepsilon < 1)$ заданныя числа. Доказать, что перемѣнное x_n сходящееся и что предѣлъ его $\xi = \lim\limits_{n=\infty} x_n$ служитъ единственнымъ корнемъ уравненія $\xi = m + \varepsilon \sin \xi$. Въ предположеніи $x_0 = m$ доказать неравенство $|x_n - \xi| < \varepsilon^{n+1}$.

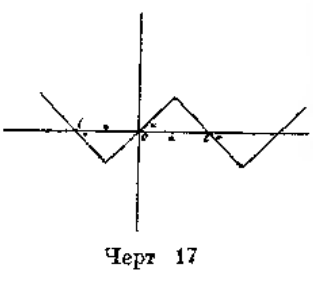
90. Послѣдовательность значеній перемѣннаго x_n задается слѣдующимъ образомъ: $x_1 = \frac{x_0}{2 + x_0}$, $x_2 = \frac{x_1}{2 + x_1}, \ldots x_n = \frac{x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}, \ldots$, число же x_0 произвольное > 0. Доказать, что перемѣнное x_n сходящееся и найти $\lim\limits_{n=\infty} x_n$.

91. Послѣдовательность значеній перемѣстнаго x_n задается слѣдующимъ образомъ: $x_1 = \frac{1}{2} e^{-x_0}$, $x_2 = \frac{1}{2} e^{-x_1}, \ldots x_n = \frac{1}{2} e^{-x_{n-1}}, \ldots$ Число x_0 произвольное. Доказать, что x_n сходящееся перемѣнное и что $\xi = \lim\limits_{n=\infty} x_n$ служитъ единственнымъ корнемъ уравненія $2\xi = e^{-\xi}$.

Введеніе въ дифференціальное исчисленіе.

92. Составить графикъ функціи $y = 2x$, $0 \leqq x < 1$
$y = 3 - x$, $1 \leqq x \leqq 2$.

Провѣрить, что функція непрерывна.



Черт. 17

93. Составить функцію, графикъ которой на черт. 17. $\frac{\pi}{2} = aob = oba = \ldots \alpha = 45°$.

94. Прослѣдить за измѣненіемъ функціи $y = \arcsin(\sin x)$.

95. То-же для функціи $y = \arccos(\cos x)$.

96. То-же для функціи $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, въ каждомъ изъ промежутковъ $(4k - 1)\frac{\pi}{2} < x < (4k + 1)\frac{\pi}{2}$, k цѣлое.

97. Вычислить $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 + x}$.

98. Преобразовать $z = \arcsin x + \arcsin y$, выведя формулу сложенія.

99. Преобразовать $z = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$, выведя формулу сложенія.

100. Прослѣдить за измѣненіемъ функціи $y = \arccos x + \arccos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3(1-x^2)}\right)$, $-1 \leqq x \leqq 1$.

101. При какихъ значеніяхъ x функція $y = \sqrt{x - E\sqrt{x}}$, $x > 0$ терпитъ разрывъ непрерывности. Примѣчаніе. Eu = цѣлой части u.

102. Провѣрить равенство $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$. Указаніе. Воспользоваться равенствомъ: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - m\varphi\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} m\varphi}{1 + \operatorname{tg} m\varphi}$.

108. Вычислить $2\,arctg\,10 + arcsin\left(\frac{20}{101}\right)$.

104. Прослѣдить за измѣненіемъ функціи $y = \frac{2x-1}{2} - \frac{1}{\pi}\,arctg\left(tg\frac{2x-1}{2}\pi\right)$, если x не — цѣлому числу, $y = x$, если x число цѣлое, $0 \leq x < \infty$.

105. Опредѣлить, въ какомъ промежуткѣ можетъ быть разсматриваема функція y, значенія которой вычисляются по правилу $y = arcsin\,\frac{2x}{1+x^2}$.

106. При какомъ значеніи a функція

$$y = x\,log\,(x^2),\ \text{если } x \text{ не} = 0,$$
$$y = a,\qquad \text{если } x = 0,$$

непрерывна въ промежуткѣ $(-\infty, +\infty)$.

107. Опредѣлить въ какомъ промежуткѣ могутъ быть разсматриваемы функціи y и z, значеніе которыхъ вычисляется по правиламъ:

$$y = x\,log\,x,\quad z = \frac{x}{2}\,log\,x^2,\ \text{если } x \text{ не} = 0,$$
$$y = 0,\qquad z = 0,\qquad \text{если } x = 0.$$

108. Въ какихъ промежуткахъ можно разсматривать функціи y, z, u, значенія которыхъ вычисляются по правиламъ: $y = \sqrt{x^2-1}$, $z = log\,(x^2-1)$, $u = log\,(x-1) + log\,(x+1)$.

109. Вычислить $e^{\frac{1}{2}}$ съ точностью до $\frac{1}{100}$.

110. Вычислить $\sqrt[10]{e}$ съ точностью до 0,00001

111. Вычислить съ точностью до $\frac{1}{100}$ число $e^{\sqrt{2}}$.

112. Доказать неравенство $(y-x)\cos y < \sin y - \sin x < (y-x)\cos x$, при $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$.

113. Доказать неравенство $\frac{y-x}{\cos^2 x} < tg\,y - tg\,x < \frac{y-x}{\cos^2 y}$, при $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$.

114. Доказать неравенство $(y-x)\,x^x\,lg\,a < a^y - a^x < (y-x)\,a^y\,lg\,a$, при $y > x$.

Дифференцированіе функцій одной перемѣнной независимой.

Найти производную:

115. $y = \sin^2 x$.

116. $y = \sin(x^2)$.

117. $y = \sin^2 \cos\frac{x}{2}$.

118. $y = \sin tg\,a^{x^2}$.

119. $y = log\,\sin\cos^2 3x$.

120. $y = log\,arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + arctg\,(x^2)$.

121. $y = \frac{arccos\,x}{\sqrt{1-x^2}}$.

122. $y = x^{\sin x}$.

123. Вычислить (пользуясь таблицами логариѳмовъ) угловой коэффиціентъ касательной къ кривой $y = 2^x$ въ точкѣ (0,1).

Найти производную

124. $y = e^x \sin x \cos^2 x$.

125. $y = \frac{log\,x \cdot e^x}{x \sin x}$.

126. $y = \frac{\sqrt{1+x} + x^2}{\sqrt{1-x} + x^2}$.

127. $y = arc\sin x\,\sqrt{1-x^2} + (arc\,tg\,x)^x$.

128. $y = arc\sin^2 x$.

129. $y = arc\sin^3 \sin^2 arc\,tg^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

130. $y = arc\sin\sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$.

131. $y = arc\sin\cos x$.

132. $y = arc\sin(\sin x)$.

133. $y = arc\sin\frac{1}{x}$.

134. $y = arc\cos\frac{1}{x}$.

135. $y = arc\cos(3x - 4x^3)$.

136. $y = 2(1+x)^{3/2}\left[\frac{(1+x)^3}{9} - \frac{3}{7}(1+x)^2 + \frac{3(1+x)}{5} - \frac{1}{3}\right]$.

137. $y = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}$. **138.** $y = \frac{1}{5}\log\frac{x+2}{x-3}$

139. $y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$. **140.** $y = \log\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$

141. $y = \sqrt{x^2+1} - \log\left[\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]$. **142.** $y = \sqrt{x} + \log x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

143. $y = \frac{1}{20}\log\frac{2\sqrt{3+4x^2}+5x}{2\sqrt{3+4x^2}-5x}$. **144.** $y = \frac{1}{20}\log\frac{x^4-3}{x^4+2}$.

145. $y = \log(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$. **146.** $y = \frac{1}{2a}\left[\log\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x+a} - \frac{a}{x+a}\right]$.

147. $y = \frac{x(x-\sqrt{x^2-1})}{2} + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1})$.

148. $y = \frac{x^4}{4}\left[(\lg x)^2 - \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{8}\right]$. **149.** $y = \frac{1}{2}tg^2 x + \log\cos x$.

150. $y = \lg tg\frac{x}{2}$ **151.** $y = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\lg tg\frac{x}{2}$.

152. $y = \frac{2}{3}cotg\, x - \frac{\cos x}{3\sin^3 x}$. **153.** $y = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\lg tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

154. $y = \frac{1}{2}tg^2 x + \lg\cos x$.

155. $y = \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + \lg tg\frac{x}{2}$. **156.** $y = tg(\arcsin x - \arcsin x$.

157. $y = \lg(x^2+2ax+3a^2) - \frac{2a+3}{a\sqrt{2}}arc\,tg\frac{x+a}{a\sqrt{2}}$. **158.** $y = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)$.

159. $y = \frac{1}{5\sqrt{3}}\arcsin\frac{5x}{2\sqrt{3+4x^2}}$ **150.** $y = \log\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}} + 2\,arc\,tg(x-1)$.

161. $y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}arc\,tg\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$

162. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}arc\,tg\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$ **163.** $y = \frac{2}{3}arc\,tg\,x + \frac{1}{3}arctg\frac{x}{1-x^2}$.

164. $y = \log\left[\frac{(1+x)^{1/4}-1}{(1+x)^{1/4}+1}\right] - 2\,arc\,tg(1+x)^{1/4}$.

165. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ **166.** $y = \frac{1}{\sqrt{ab}}arctg\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,tg\,x\right)$.

167. $y = \frac{1}{2}tg\,x + \frac{1}{2\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}\,tg\,x)$. **168.** $y = \frac{2}{3}arctg\left(\frac{5\,tg\frac{x}{2}+4}{3}\right)$.

169. $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

170. Найти производную отъ функціи $y = \arccos\frac{2x+1}{\sqrt{8x}}$. Опредѣлить, въ какомъ промежуткѣ можетъ быть задана эта функція.

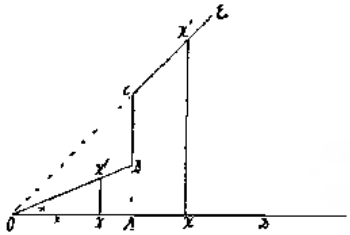
171. Найти производную отъ функціи $y = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}$, заданной въ промежуткѣ $-|a| < x < |a|$

172. Найти производную функціи $y = \sqrt{1-x^2}\log\frac{a+bx}{a-bx} + \frac{2}{b}\left\{a\arcsin x - \sqrt{a^2-b^2}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,x}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\right\}$, заданной въ промежуткѣ $-1 < x < 1$; $a^2 > b^2$.

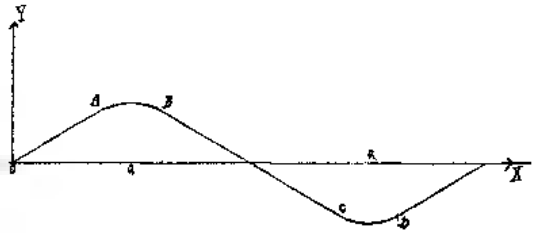
173. Найти производную отъ функціи $y = |x|$ (y = абс. зн. x).

174. Функція y отъ x, заданная въ промежуткѣ $(0, \infty)$, есть площадь фигуры,

полученной отъ сѣченія фигуры $ECBOAD$ прямой XX', $\perp$-ой къ OD, разстояніе которой отъ точки O равно x. Составить функцію y, провѣрить, что она непрерывна, найти ея производную и построить графикъ (черт. 18). $CA \perp OA$, $OA = a$, $AB = b$, $AC = c$.



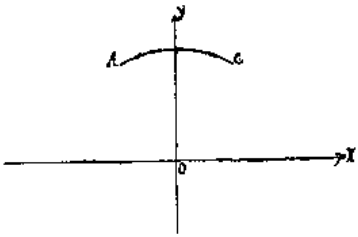
Черт. 18.



Черт. 19.

175. Кривая (черт. 19) $OABCDE$ графикъ функціи. Дуги AB и CD—дуги въ 60° окружностей радіуса a съ центрами соотвѣтственно въ O_1 и O_2. Прямыя OA, BC и DE касательныя въ концахъ дугъ A, B, C и D. Хорды AB и CD -ны OX. Прямая OA проходитъ черезъ начало координатъ. Составить функцію и показать, что она имѣетъ непрерывную производную.

176. Дуга AC дуга въ 60° окружности радіуса r къ центромъ въ началѣ координатъ, причемъ хорда AC $\parallel$-на оси OX. Составить функцію, непрерывную вмѣстѣ съ своими первыми двумя производными въ промежуткѣ $(-\infty, \infty)$, графикъ которой въ промежуткѣ $\left(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$, дуга AC, въ остальныхъ параболы вида $y = a + bx + cx^2$ (съ осью $\parallel$-ою OY) (черт. 20).



Черт. 20.

Дифференцированіе функцій, заданныхъ параметрически.

Найти производныя отъ y по x.

177. $y = \varphi(u, v, w)$, гдѣ $u = \sin x$, $v = \cos x$, $w = x^2$.

178. $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$.

179. $y = a(t - \sin t)$, $x = a(1 - \cos t)$.

150. $x = \frac{3at}{1 + t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1 + t^3}$.

181 $x = m \sin^3 t$, $y = n \cos^3 t$.

182. $y = k \sin t + \sin kt$, $x = k \cos t + \cos kt$.

183. $x = \frac{1 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4}$, $y = \frac{2t^2}{1 + 2t^2 + t^4}$

184. $y = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$, $x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$

185. $x = \arcsin t$, $y = \arcsin \sqrt{1 - t^2}$. Построить графикъ функціи.

158. Черезъ точку (2,1) на кривой провести касательную къ кривой $x = t^2 - 3t + 4$, $y = t^2 - 4t + 4$.

187. Провести касательную къ кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$ въ точкѣ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

188. Провести къ кривой $x = t^4 - 2t^3 + t^2 + 4t - 2$, $y = t^4 + 2t^3 - t^2 - 4t - 2$, касательныя изъ точки (0,0) на кривой.

189 Найти производныя 1-го и 2-го порядка отъ y по x: $x = 1 + t^2$, $y = 2t$.

Производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ функцій одной перемѣнной независимой.

190. Найти $d^4 f(u)$, гдѣ u функція отъ x.

191. $y = (3x^2 + 1)\left(\frac{1}{5}x^3 + x^2 - 3\right)(x-1)^3$. Найти производную отъ y порядка 8-го.

192. $y = \frac{f(x)}{x-a}$, гдѣ $f(x)$ цѣлая раціональная функція степени n, найти производную порядка m отъ y, если $m \geqq n$.

193. Найти производную порядка n отъ функціи $y = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$.

194. Найти производную 25-го порядка отъ функціи $x^3 e^{2x}$.

195. Найти $U_m^{(k)} = \left(\frac{d^m x^k e^{xx}}{dx^m}\right)_{x=0}$

196. Найти производную порядка n отъ $x^k \log x$.

197 Найти производную порядка n отъ $y = x^2 \sin ax$.

198. Найти n-ыя производныя функцій $y = e^{2x}\cos^2 x$ и $y = e^{2x}\sin^2 x$.

199. $y = x^{n-1}\log x$. **200.** $y = \cos^3 x$. **201.** $y = e^{ax}\sin bx$. **202.** $y = e^{ax}\cos bx$.

203. $y = \log(x^2 - 3x + 2)$. **204.** $y = \frac{1}{x^2(x-1)}$.

Указаніе. Разложить на простѣйшія дроби.

205. Найти $\frac{d^n}{x^n}\left\{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right\}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ постоянныя.

206. Найти n-ую производную функціи $y = \frac{x+1}{x(x-1)}$.

207. $y = \frac{x^3+1}{x^3 - x}$. **208.** $y = \frac{1}{x^2 - a^2}$

205. Доказать, что производная порядка m отъ функціи $y = \frac{1}{\sqrt{1-2ax+x^2}}$ равна $\frac{R_m(x)}{(1-2ax+x^2)^{m+\frac{1}{2}}}$, гдѣ $R_m(x)$ цѣлая раціональная функція отъ x степени m.

210. Найти производную порядка n отъ $\operatorname{arctg} x$.

Указаніе. Воспользоваться разложеніемъ $\frac{1}{1+x^2}$ на простѣйшія дроби.

211. Найти производныя порядка n отъ функцій: $e^{ax}\cos(bx+c)$, $e^{ax}\sin(bx+c)$.

212. Найти n-ую производную функціи $y = \cos^2 x \sin x$.

213 Найти n-ую производную функціи $y = \cos^4 x + \sin^4 x$.

214. Найти $P = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_n y$ гдѣ $y = \varphi(x) e^{ax}$.

215. Положимъ $y = a\cos\left(n\log\frac{x}{b}\right)$, доказать, что $x^2 y^{(n+2)} + (2n+1)x y^{(n+1)} + 2n^2 y^{(n)} = 0$.

216. Найти $u_n = \left(\frac{d^n (\arcsin x)^2}{dx^n}\right)_{x=0}$.

Ук. Найти зав. связывающую u_{n+1} и u_n.

217. Доказать, что каждая изъ функцій $\sin(n \arcsin x)$, $\sin(n \arccos x)$, $\cos(n \arcsin x)$, $\cos(n \arccos x)$ удовлетворяетъ ур-нію $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$.

218. Найти $u_n = \left[\frac{d^n \sin(\mu \arcsin x)}{dx^n}\right]_{x=0}$

219. Положимъ $\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = e^{-x^2} p_n(x)$; доказать, что: 1) $p_{n+1}(x) + 2x p_n(x) + 2n p_{n-1}(x) = 0$; 2) $p_n(x) - p'_{n-1}(x) + 2x p_{n-1}(x) = 0$; 3) $p''_n(x) - 2x p'_n(x) + 2n p_n(x) = 0$ На основаніи послѣдняго соотношенія найти полиномъ $p_n(x)$.

220. Производная n-го порядка отъ $\arcsin x$ имѣетъ видъ: $\frac{p_n(x)}{(1-x^2)^{\frac{n}{2}-1}}$, гдѣ $p_n(x)$ полиномъ степени $n-1$. Доказать соотношенія: 1) $p_{n+2} - (2n+1)x p_{n+1} - n^2(1-x^2)p_n = 0$; 2) $(1-x^2)p''_n + (2n-3)x p'_n - (n-1)^2 p_n = 0$.

221. На основаніи соотношенія 2-го предыдущей задачи показать, что

1. $p_{2k+1}(x) = (1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2k-1)^2 \left\{1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{k^2(k-1)^2 \ldots (k-j+1)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2j} (2x)^{2j}\right\}$

2. $p_{2k}(x) = (1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2k-1)^2 x \left\{1 + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(k-1)^2(k-2)^2 \ldots (k-j)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2j+1)} (2x)^{2j}\right\}$

3. $|p_{2k+1}(x)| < \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2k-1)^2}{2} \{(1+x)^{2k+1} + (1-x)^{2k+1}\}$. Примѣнить эти результаты къ изслѣдованію остаточнаго члена въ формулѣ Маклорена для $\arcsin x$.

222. Пусть $y = e^{\frac{1}{x}}$. Доказать, что производная n-го порядка имѣетъ видъ $y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{2n}} p_n(x) e^{\frac{1}{x}}$, гдѣ $p_n(x)$ есть полиномъ степени $(n-1)$. Доказать, что 1) $x^2 p'_n(x) - \{(2n-2)x+1\} p_n(x) + n(n-1) p_{n-1}(x) = 0$. 2) $p_{n+1}(x) = (2nx+1) p_n(x) + n(n-1) x^2 p_{n-1}(x) = 0$. На основаніи 1-го соотношенія найти полиномъ $p_n(x)$.

223. Доказать, что $\frac{d^n x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}$.

224. Положимъ $\frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n} = e^{-x} p_n(x)$, доказать что 1) $x p''_n(x) + (1-x) p'_n(x) + n p_n(x) = 0$; 2) $p_{n+1}(x) = (2n+1-x) p_n(x) + n^2 p_{n-1}(x) = 0$. Найти полиномъ $p_n(x)$.

225. Положимъ $\frac{d^n \frac{1}{1+x^2}}{dx^n} = \frac{p_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$; доказать что 1) $p_{n+1}(x) + (2n+2)x p_n(x) + n(n+1)(1+x^2) p_{n-1}(x) = 0$, 2) $\frac{dp_n}{dx} + n(n+1) p_{n-1} = 0$. 3. $(1+x^2)\frac{d^2 p_n}{dx^2} - 2x\frac{dp_n}{dx} + n(n+1) p_n = 0$.

226. На основаніи соотношенія 3-го предыдущей задачи показать, что

1. $p_{2k}(x) = (-1)^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2k \left\{\frac{(1+xi)^{2k+1} + (1-xi)^{2k+1}}{2}\right\}$

2. $p_{2k-1}(x) = (-1)^{k-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2k-1) \left\{\frac{(1+xi)^{2k} - (1-xi)^{2k}}{2i}\right\}$

3. $|P_{2k}(x)| < 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2k (1+x^2)^{\frac{2k+1}{2}}$. Примѣнить полученные результаты къ разсмотрѣнію остаточнаго члена формулы Маклорена для $\operatorname{arc\,tg} x$.

227. Положимъ $P_n(x) = \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$ доказать, что 1) $(x^2-1) P''_n(x) + 2x P'_n(x) - n(n+1) P_n(x) = 0$. 2. $P_{n+1}(x) - (4n+2) x P_n(x) + 4n^2 P_{n-1}(x) = 0$.

228. Показать, что производныя отъ полинома $P_n(x) = (x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{1-x^2})^n$ удовлетворяютъ соотношенію $(x^2-1)\frac{d^{m+2} P_n(x)}{dx^{m+2}} + (2m+1) x \frac{d^{m+1} P_n(x)}{dx^{m+1}} + (m^2-n^2)\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = 0$.

Дифференцированіе функцій многихъ перемѣнныхъ.

Найти частныя производныя функцій

229. $u = 2x^3 - 3y^2 x + 3y^3$.

230. $u = \sin x \sin y \cos z + \sin x \cos y \sin z + \cos x \sin y \sin z - \cos x \cos y \cos z$.

231. $u = \operatorname{Log} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$.

232. $u = \log \frac{x - (x^2+y^2)^{1/2}}{x + (x^2+y^2)^{1/2}}$.

233. $u = z^{(y^x)}$.

234. $u = \arcsin \frac{(x^2-y^2)^{1/2}}{(x^2+y^2)^{1/2}}$.

235. Найти производныя 1-го и 2-го порядка отъ $u = arctg \frac{x+y}{1-xy}$

236. Найти $\frac{\partial^2 \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})}{\partial x\, \partial y}$

237. Найти $\frac{\partial^3 e^{xyz}}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$

238. Найти производныя порядка n отъ $u = \varphi(x) + \psi(y) + \omega(z)$.

239. Найти дифференціалы 1-го и 2-го порядковъ отъ $u = \varphi(xy)$.

240. Найти дифференціалы 1-го и 2-го порядковъ отъ $u = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$.

241. Доказать. Если $x_1 = \cos\varphi_1$, $x_2 = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2$, $x_3 = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3$, то

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_2}, & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_2}, & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \varphi_1}, & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi_2}, & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi_3} \end{vmatrix} = (-1)^n \sin^3\varphi_1 \sin^2\varphi_2 \sin\varphi_3.$$

242. Доказать. Если $u_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}}$, $u_2 = \frac{x_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}}$,

$$u_3 = \frac{x_3}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}} \text{ то } \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{1+\frac{3}{2}}}.$$

243. Найти производныя порядка n отъ $u = \varphi(ax + by + cz)$

244. Найти дифференціалъ 2-го порядка отъ $y = \varphi(u, v, w)$, гдѣ u, v и w функціи перемѣннаго независимаго x.

245. Найти полный дифференціалъ 2-го порядка отъ $t = \varphi(u, v, w)$ гдѣ u, v, w функціи отъ перемѣнныхъ независимыхъ x, y, z

246. Найти частныя производныя по x, y, z функціи $t = \varphi(u, v, w)$, гдѣ $u = ax$, $v = by$, $w = cz$.

247. Найти производныя 2-го порядка отъ $t = \varphi(u, v)$, гдѣ $u = a_1x + b_1y + c_1z$, $v = a_2x + b_2y + c_2z$.

248. Найти производныя 2-го порядка отъ $t = \varphi(u, v)$, гдѣ $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

249. Найти дифференціалъ 4-го порядка отъ функціи $u = x^4 + 4x^3y + 2xy^2z - 3xyz^2 + z^4$.

250. Найти 4-й дифференціалъ функціи $u = x^4 + 3x^3y + z^4 + 27x^2y - 32xyz + 15y^2z - z^3$.

251. Провѣрить теорему Эйлера объ однородныхъ функціяхъ на функціи

$$u = \arcsin \frac{x + \sqrt{y^2 + z^2}}{x - \sqrt{y^2 + z^2}}.$$

252. Доказать, что однородныя функціи $\varphi(x, y)$ измѣренія n удовлетворяютъ соотношенію: $x^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k} + C^1_n x^{k-1} y \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^{k-1} \partial y} + C^2_n x^{k-2} y^2 \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^{k-2} \partial y^2} + \ldots + y^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial y^k} = n(n-1)\ldots(n-k+1)\varphi$, гдѣ C^k_n — число сочетаній изъ n эл. по k.

253. Провѣрить равенство: $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$, если $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

254. Доказать, что функція $u = \log(x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz)$ удовлетворяетъ условію: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}$

255. Показать, что функція $z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax)$ удовлетворяетъ ур-нію $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

256. Доказать, что функція $z = x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^n\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворяетъ ур-нію $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = n^2 z$.

257. Если $z = x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, то $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = n(n-1)z$.

258. Доказать, что функція $z = f[x + \varphi(y)]$ удовлетворяетъ ур-нію $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

259. Доказать, что функція $z = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$ удовлетворяетъ ур-нію $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

260. Если $z = \varphi(ay + bx)\psi(ay - bx)$, то $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - b^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) = 0$.

261. Доказать, что функція $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворяетъ ур-нію $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

262. Если $z = \frac{\varphi(x)\psi(y)}{(\varphi(x) + \psi(y))^2}$, то $\frac{\partial^2 \log z}{\partial x\,\partial y} = 2z$.

263. Если $v = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\left\{Ae^{\alpha\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + Be^{-\alpha\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}$, то $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \alpha^2 v$.

Дифференцированіе неявныхъ функцій.

Найти производныя отъ y по x:

264. $y^n = \frac{x+y}{x-y}$.

265. $y = 1 + xe^y$.

266. $x\sin y + \cos y + \cos 2y = 0$.

267. $y\sin x - \cos(x - y) = 0$.

268. $\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = a$.

269. $x = a\arccos\frac{a-y}{a} - (2ay - y^2)^{1/2}$.

270. Функціи y и z отъ перемѣнной независимой x заданы неявно системой уравненій $x^2 + y^2 = z^2 - 0$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Найти ихъ первые и вторые дифференціалы.

271. Функціи x и y отъ перемѣнной независимой z заданы неявно системой ур-ній $x^2 + y^2 = 2z^2 = 0$, $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$. Найти ихъ производныя перваго и второго порядковъ для $z = 1$, $y = -1$, $x = 1$.

272. Функція y перемѣнной независимой x задана неявно уравненіемъ $(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2)$. Найти значеніе производной y' для системы значеній $x = 0$, $y = 0$.

273. Функція y отъ перемѣнной независимой x задана неявно уравненіемъ $x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$. Найти ея производную y' при $x = 0$, $y = 0$.

274. Уравненіе $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ опредѣляетъ y, какъ неявную функцію отъ x. Написать результатъ четырехкратнаго дифференцированія этого уравненія.

275. Функція y задана неявно уравненіемъ $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Найти ея вторую и третью производныя, если при $x = \frac{1}{2}$ значеніе функціи $y = \frac{1}{2}$.

276. Функція y задана неявно уравненіемъ $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$. При $x = 1$, $y = 1$ найти ея третью производную.

277. Найти частныя производныя отъ z по x и y: $e^z = \cos x\cos y$.

278. Найти производныя отъ y и z по x: $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$, $x + y + z = a$.

279. Функціи y и z заданы неявно системой уравненій $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y^2 - 2x + z = 0$. Найти значенія ихъ производныхъ перваго и второго порядковъ, если при $x = 1$ функціи принимаютъ значенія $y = 1$, $z = 1$.

280. Функціи y и z заданы неявно системой уравненій $7x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 3$, $4x + 2y - 2z^2 = 0$. Найти значенія ихъ производныхъ перваго и второго порядковъ для $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$.

281. Найти первыя и вторыя производныя отъ z и u по x и y: $x + y + z + u = a$, $x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = b$.

282. Функція z задана неявно уравненіемъ $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

283. Функція z отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ x и y задана неявно уравненіемъ: $x^y \cdot y^x \cdot z^z = A$. Найти ея полный дифференціалъ dz.

284. Функція z отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y задана неявно уравненіемъ $x \cos y + y \cos z + z \cos x = A$. Составить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

285. Функція z отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y задана неявно уравненіемъ: $xy + xz + yz = 1$. Найти ея полные дифференціалы 1-го, 2-го и 3-го порядковъ.

286. Функція z отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ x и y задана неявно уравненіемъ: $xy + xz + yz = 1$. Найти $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ и $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$.

287. Функціи u и v отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y заданы неявно системой двухъ уравненій: $xu + yv = 1$, $x + y + u + v = 0$. Найти ихъ полные дифференціалы 1-го и 2-го порядковъ.

288. Функція z отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ задана неявно уравненіемъ: $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$. При системѣ значеній $x = -2$, $y = 0$, $z = 1$ найти выраженіе для второго полнаго дифференціала.

289. Функція z отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ задана неявно уравненіемъ $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2yz - 2xz - 72 = 0$. При $x = 1$, $y = 1$ принимаемъ $z = 4$. Вычислить при этой системѣ значеній $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

290. Функціи u и v заданы неявно уравненіями $xu + yv = 0$, $uv - xy = 5$. При $x = 1$ и $y = -1$ получаемъ $u = 2$ и $v = 2$ (вторыя рѣшенія отбрасываемъ). При этой системѣ значеній перемѣнныхъ вычислить $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

291. Найти производныя отъ x и y по z: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = kt$.

292. Найти частныя производныя отъ z по x и по y: $x = a \cos u \sin v$, $y = b \cos u \cos v$, $z = c \sin u$.

293. Показать, что функція z отъ x и y, заданная ур-ніями $z = \alpha x + y f(\alpha) + \varphi(\alpha)$, $0 = x + y f'(\alpha) + \varphi'(\alpha)$, гдѣ α вспомогательный параметръ, удовлетворяетъ зависимости $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$.

294. Доказать, что функція z отъ x и y, заданная ур-ніемъ $y = x\varphi(z) + \psi(z)$ удовлетворяетъ зависимости: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0$.

295. Доказать, что функція z отъ x и y заданная ур-ніями: $[z - \varphi(\alpha)]^2 = x^2(y^2 - \alpha^2)$, $[z - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) = \alpha x^2$, гдѣ α вспомогательный, параметръ удовлетворяетъ зависимости $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy$.

296. Доказать что функція z отъ x и y, заданная ур-ніями: $z\varphi'(\alpha) = [y - \varphi(\alpha)]^2$, $(x + \alpha)\varphi'(\alpha) = y - \varphi(\alpha)$ гдѣ α вспомогательный параметръ, удовлетворяетъ зависимости: $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

Замѣна перемѣнныхъ.

297. Преобразовать уравненіе $\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$, взявъ y за перемѣнное независимое.

298. Преобразовать уравненіе $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$, взявъ за независимое перемѣнное y.

299. Преобразовать выраженіе $\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, взявъ y за независимое перемѣнное, а x за его функцію.

300. Въ уравненіи $(1-x^2)\frac{d^3y}{dx^3} - x\frac{dy}{dx} = 0$ измѣнить независимую перемѣнную, положивъ $x = \cos t$.

301. Преобразовать ур-ніе $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$, положивъ $x = 2\sqrt{t}$.

302. Преобразовать уравненіе $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2y = 0$, положивъ $x = \cos t$.

303. Преобразовать ур-ніе: $(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0$, положивъ $x = tg\, t$.

304. Вычислить $-\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$, если $x^2+y^2 = a^2$.

305. Преобразовать выраженіе $\frac{x\left(\frac{dy}{dx}\right) - y}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}}$, положивъ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

306. Найти отношеніе отрѣзковъ, отсѣкаемыхъ нормалью и касательной къ кривой $y = f(x)$ соотвѣтственно отъ осей OY и OX въ Декартовыхъ и полярныхъ координатахъ ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$).

307. Преобразовать ур-ніе $x^3y'' + 3xy' + y = 0$, положивъ $x = e^t$.

308. Преобразовать ур-ніе $(a+x)^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3(a+x)^2\frac{d^2y}{dx^2} + (a+x)\frac{dy}{dx} + by = 0$, положивъ $t = \log(a+x)$.

309. Преобразовать уравненіе $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} + \frac{4m^2y}{(e^{2x}+e^{-2x})^2} = 0$, положивъ $x = \frac{1}{2}\log tg\, 2t$.

310. Преобразовать уравненіе $(x-x^3)y'' + (1-3x^2)y' - xy = 0$, положивъ $x = \sqrt{1-t^2}$.

311. Пусть $f(t)$ и $\varphi(t)$ двѣ функціи независимаго перемѣннаго t и $f'(t)$ и $\varphi'(t)$ ихъ производныя. Положимъ $x = f(t) - \varphi'(t)$, $y = \varphi(t) - f'(t)$, $X = f'(t)\sin t - \varphi'(t)\cos t$, $Y = f'(t)\cos t + \varphi'(t)\sin t$. Доказать, что имѣетъ мѣсто тождественно $dx^2 + dy^2 = dX^2 + dY^2$.

312. Если x функція отъ t и $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, то $\frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$.

313. Преобразовать ур-ніе $9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \cdot \frac{d^5y}{dx^5} - 45\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{d^4y}{dx^4} + 40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 0$, положивъ: $y = \frac{aX+bY+c}{a''X+b''Y+c''}$, $x = \frac{a'X+b'Y+c'}{a''X+b''Y+c''}$.

314. Положивъ въ ур-ніи $y''' + p_1y'' + p_2y' + p_3y = 0$: $y = uY$, $x = \varphi(t)$, преобразуемъ его въ ур-ніе $\frac{d^3Y}{dt^3} + P_1\frac{d^2Y}{dt^2} + P_2\frac{dY}{dt} + P_3Y = 0$. Если $a = p_2 - \frac{1}{3}p_1^2 - p_1'$, $b = p_3 - \frac{1}{3}p_1p_2 + \frac{1}{3}p_1'' + \frac{2}{27}p_1^3$, и $\nu = 2b - a$, $\delta = 9a\nu^2 + 7\nu'^2 - 6\nu''\nu$, а N и Δ также функціи P_1, P_2, P_3 и ихъ производныхъ по t, то $N = \nu\nu'^3$, $\Delta = \delta\nu^3$.

315. Преобразовать ур-ніе $(1-x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + \frac{2ay}{1-x} = 0$, положивъ $x = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$.

316. Преобразовать выраженіе $x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + u = 0$, принявъ за новую независимую перемѣнную $y = \lg x$.

317. Преобразовать ур-ніе $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, положивъ $u = x$, $v = x^2+y^2$.

318. Преобразовать ур-ніе $x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, положивъ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

319. Преобразовать выраженіе $V = x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y}$, положивъ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

320. Преобразовать ур-ніе $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3)\frac{\partial z}{\partial y} + x^2y^2z = 0$, положивъ $x = uv$, $y = \frac{1}{v}$.

321. Дано уравненіе $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2(x - y^2)\frac{\partial z}{\partial y} + x^2y^2 z = 0$. Ввести новыя независимыя перемѣнныя $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ такъ, чтобы преобразованное уравненіе по формѣ было тождественно съ даннымъ.

322. Преобразовать ур-ніе $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, положивъ $u = y + ax$, $v = y - ax$.

323. Преобразовать ур-ніе $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$, положивъ $u = x$, $v = \frac{y}{z}$.

324. Преобразовать уравненіе $(x + mz)\frac{\partial z}{\partial x} + (y + nz)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, положивъ $u = x$, $v = \frac{y + nz}{x + mz}$.

325. Преобразовать уравненіе $y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$, взявъ за новыя независимыя перемѣнныя ρ, θ, связанныя съ x и y уравненіями $x = \rho \cos\theta$; $y = \rho \sin\theta$.

326. Преобразовать ур-ніе $\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2} y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}$, положивъ $u = \frac{x}{y}$, $v = x$, $w = xz - y$.

327. Преобразовать $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, положивъ $Z = \frac{z}{x}$, $X = x + y$, $Y = \frac{y}{x}$.

328. Преобразовать выраженіе $V = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}$, положивъ $\sqrt{x^2 + y^2} = e^u$, $z = tg\, v$, $t = x + y + z$ и взявъ u и t за новыя независимыя перемѣнныя.

329. Преобразовать ур-ніе $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, положивъ $w = xy - z$, $u = x + y$, $v = x - y$.

330. Преобразовать уравненіе $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (l - x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x}$, положивъ

$$\left.\begin{aligned} u &= \sqrt{l - x} + \frac{y}{2} \\ v &= \sqrt{l - x} - \frac{y}{2} \end{aligned}\right\} \text{ нов. незав. перем., } \omega = z\sqrt{l - x} \text{ нов. незав. функція.}$$

331. Составить уравненіе для нахожденія тѣхъ рѣшеній уравненія $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, которыя функціи одного r, гдѣ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

332. Преобразовать выраженіе $\Delta_1 v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$, положивъ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

333. Преобразовать ур-ніе $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ положивъ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

334. Составить уравненіе для нахожденія тѣхъ рѣшеній уравненія $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, которыя функціи одного r, гдѣ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

335. Преобразовать выраженіе $\Delta_1 v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2$ положивъ $x = r\sin\theta\sin\varphi$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\cos\theta$.

336. Преобразовать ур-ніе $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ положивъ $x = r\sin\theta\sin\varphi$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\cos\theta$.

337. Положивъ $y_1 = \alpha_1 Y_1 + \beta_1 Y_2 + \gamma_1 Y_3$, $y_2 = \alpha_2 Y_1 + \beta_2 Y_2 + \gamma_2 Y_3$, $y_3 = \alpha_3 Y_1 + \beta_3 Y_2 + \gamma_3 Y_3$, гдѣ Y_1, Y_2, Y_3 также какъ и y_1, y_2, y_3, функціи отъ x, преобразовать опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2 & y_3, \\ \frac{dy_1}{dx}, & \frac{dy_2}{dx}, & \frac{dy_3}{dx} \\ \frac{d^2y_1}{dx^2}, & \frac{d^2y_2}{dx^2}, & \frac{d^2y_3}{dx^2} \end{vmatrix}.$$

338. Если $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$ и $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ то $\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]$.

339. Если $V(x, y, z)$ удовлетворяетъ ур-нію $\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$, то и функція $\frac{1}{r} \cdot V\left(k^2 \frac{x}{r^2}, k^2 \frac{y}{r^2}, k^2 \frac{z}{r^2}\right)$, гдѣ k постоянное, а $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, ему удовлетворяетъ.

340. Если $V(x, y, z)$ и $V_1(x, y, z)$ рѣшенія ур-нія $\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ то $U = V(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2) V_1(x, y, z)$ рѣшеніе ур-нія $\Delta_2 \Delta_2 U = 0$.

341. Найти производную отъ Y по X, если $X = \frac{dy}{dx}$, $Y = \frac{d^2 y}{dx^2}$.

342. Найти частныя производныя отъ Z по X и Y, если X, Y, Z связаны съ x, y и z, гдѣ z функція отъ x и y, ур-ніями: $X = x$, $Y = \frac{\partial z}{\partial x}$, $Z = z - \frac{\partial z}{\partial y}$ и (Преобразованіе Ампера).

343. Найти частныя производныя перваго и второго порядковъ отъ Z по X и Y, если $X = p$, $Y = q$, $Z = px + qy - z$, гдѣ z функція отъ x и y, и $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ (Преобразованіе Лежандра).

ОТДѢЛЪ IV

Приложенія дифференціальнаго исчисленія къ анализу.

Ряды.

1. Функцію $x^4 + 1$ разложить по возрастающимъ степенямъ $x + 1$.

Разложить въ рядъ по возрастающимъ степенямъ x функцію. **2.** $y = \frac{3 - x}{1 - x^2}$

3. $y = \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^2 (x - 2)}$ **4.** $y = (x - tg\, x) \cos x$. **5.** $y = \cos^n x$.

6. $y = \sin x$. **7.** $y = \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x - \cos^3 x$.

8. $y = e^{ax} \sin bx$. **9.** $y = \cos x\, ch\, x$.

10. $y = e^{x \cot a} \cos x$. *Указаніе* Воспользоваться формулами Эйлера.

11. $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$. **12.** $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$

13. $y = \frac{x^2 - x^2 + 1}{\sqrt{1 + x}}$.

14. Разложить въ рядъ по возрастающимъ степенямъ $\frac{1 - x}{1 + x}$ функцію $\log x$.

15. Доказать равенство $\frac{x}{\sqrt{1 + x}} = \frac{x}{1 + x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1 + x}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left(\frac{x}{1 + x}\right)^3 + \ldots$, справедливое при $x > -\frac{1}{2}$.

Разложить въ рядъ по возрастающимъ степенямъ x функціи:

16. $y = \log(x^2 - 3x + 2)$. *Указаніе*. Разложить въ рядъ производную y

17. $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$. **18.** $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{a - x}{a + x}$

19. $y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ **20.** $y = (1 - x) e^x$.

21. $y = \frac{(1 + x)^2}{x} \log(1 + x)$ **22.** $y = \frac{\log(1 + x)}{1 + x}$.

Разложить въ рядъ по возрастающимъ степенямъ x и y функціи:

23. $\frac{1}{1 - x - y + xy}$. **24.** $\log(1 - x) \log(1 - y)$.

25. $\operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy}$. **26.** $\log \frac{1 - x - y + xy}{1 - x - y}$

27. Разложить въ рядъ $y = \operatorname{arctg}^2 x$ **28.** Разложить въ рядъ функцію $\arcsin^2 x$

29. Разложить въ ряды функціи $y = \cos \mu (\arcsin x)$, $z = \sin \mu (\arcsin x)$

Написать первые пять членовъ разложенія въ рядъ функцій

30. $y = \sin x e^x$. **31.** $y = e^{\sin x}$.

32. Найти первые 4 члена разложенія въ рядъ функціи: $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$.

Написать первые шесть членовъ разложенія въ рядъ функцій:

33. $y = (1 + x)^x$. **34.** $y = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$.

35. Найти цѣлую часть функціи

$$\left[xe^{-\frac{1}{2\cdot 3}x^2+\frac{1}{4\cdot 5}x^4-\dots+\frac{1}{2k(2k+1)}x^{2k}}\right]^n \text{ при } n=2,3,4,5,6,7. \qquad |x|<1$$

36. Вычислить $x=\sqrt[5]{245}$ съ точностью до 0,001.

37. Вычислить $\sqrt{247}$ съ точностью до 0,00001

38. Вычислить $\sin 10^\circ$ съ точностью до 0,00001

39. Вычислить съ точностью до одной тысячной $x=\cos 18^\circ$ (... 3,1415926 ...)

40. Вычислить съ точностью до одной тысячной $x=\sin 18^\circ$

41. Вычислить $\lg 2$ съ точностью до 0,001

42. Вычислить π, пользуясь формулой $\frac{\pi}{4}=4\,arctg\frac{1}{5}-arctg\frac{1}{239}$, съ точностью до 0,001 (Способъ Machu).

Указаніе. Воспользоваться теоремой о знакоперемѣнныхъ рядахъ

43. Опредѣлить число a такъ, что ея перемѣнная $\frac{\sin x-a\sin^3 x}{x-3x^3}$, гдѣ пр. $x\to 0$ была безконечно-малая 4-го порядка относит. x

44. Пользуясь рядами, найти пр. $\left\{\frac{\sqrt{1-x^2}-\cos x}{x^4}\right\}_{\text{при } x\to 0}$

45. При какомъ значеніи n отношеніе $\frac{x+\log(\sqrt{1+x^2}-x)}{x^n}$ имѣетъ предѣлъ когда $\lim x=0$.

46. Найти $\lim\frac{\log^3(1+x)-x\sin^2 x}{(1-\cos^3 x)(1-e^{x^2})}$ при $x\to 0$. **47.** Найти $\lim e^{\frac{1}{x}}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ при $x\to 0$

48. Найти пр. $\frac{1+x\log(1+x)-(1+x)^x}{x^4}$, если пр. $x\to 0$

46. Найти значеніе функціи $f(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\lg\frac{2+x}{2-x}$ при $x=0$.

50. Разложить въ рядъ функцію y, заданную уравненіемъ $y\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=a$

Указаніе Найти разложеніе второй производной отъ y.

51. Разложить въ ряды по возрастающимъ степенямъ $\sin x$ функціи $u=\sin mx$ и $v=\cos mx$.

Указаніе Составить диф. ур-ніе 2-го порядка съ независимой перемѣнной $y=\sin x$ которому удовлетворяютъ u и v.

Раскрытіе неопредѣленностей.

52. Пр. $\left\{\frac{(1+x)^m-(1-x)^m}{e^{1+x}-e^{1-x}}\right\}_{x\to 0}$

53. Пр. $\left\{\frac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\lg(1+x)}\right\}_{x\to 0}$

54. Пр. $\left\{\frac{e^{ax}-e^{-bx}}{\lg(1+nx)}\right\}_{x\to 0}$

55. Пр. $\left\{\frac{\lg(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-\frac{x^2}{2}}}\right\}_{x\to 0}$

56. Пр. $\left\{\frac{\operatorname{tg}x-1}{\arcsin(\operatorname{tg}x)-\frac{\pi}{2}}\right\}_{x\to\frac{\pi}{4}}$

57. $\lim\left(e^{\frac{1}{x}}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$ при $x\to 0$.

58. Пр. $\left\{\frac{e^x-1+x^2\sin\frac{\pi}{x}}{x}\right\}_{\text{при } x\to 0}$

59. Пр. $\left\{\frac{\cos^m x-1}{\sin^2\frac{x}{2}}\right\}_{x\to 0}$

88. Пр. $\left\{\frac{\sin 3x^2}{\lg\cos(2x-x^2)}\right\}_{x\to 0}$

61. Пр. $\left\{\frac{\lg\sin 5x}{\operatorname{cotg}x}\right\}_{x\to\frac{\pi}{2}}$

62. Найти $y=\lim\left\{\frac{x^{\cos x}}{1-\sin x+\cos x}\right\}_{x\to 0}$

63. $y=\lim\left\{\frac{e^x-e^{-x}}{1-x-\log(e^x-x)}\right\}_{x\to 0}$

64. $y=\lim\left\{\frac{1-\cos(m\arcsin x)}{\lg(1+x^2)}\right\}_{\text{при } x\to 0}$

65. Найти истинное значеніе функціи $f(x)=\sqrt{\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}}$ при $x=0$.

66. $\lim \frac{\log(1 + x + x^2) + \log(1 - x + x^2)}{x(e^x - 1)}$ при $x = 0$.

67. $\lim \frac{(a + x)^x - a^x}{x^2}$ при $x = 0$, $a > 0$. 68. Пр. $\frac{\sqrt{1 - x^2} - \cos x}{x^4}$ при $x = 0$.

69. Пр. $\left\{\frac{x^3 \sin x}{\cos x - 1}\right\}_{x=0}$.

70. Пр. $\left\{\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}\right\}_{x=0}$. 71. Найти $y = \lim \left|\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}\right|_{x=0}$.

72. Пр. $\lim \frac{xe^{3x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3}$ при $x = 0$.

73. Пр. $\left\{\frac{\lg[1 - \cos(ax)]}{\lg(x^2)}\right\}_{x=0}$. 74. Пр. $\left\{\frac{x^m}{e^x}\right\}_{x=\infty}$.

75. Пр. $\left\{\frac{\lg \operatorname{tg}(7x)}{\lg \operatorname{tg}(2x)}\right\}_{x=0}$. 76. Пр. $\left\{\frac{\lg(x - 1)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2x}}\right\}_{x=1}$.

77. $\lim \frac{\lg \operatorname{tg} ax}{\lg \operatorname{tg} bx}$ при $x = 0$. 78. Пр. $\left\{\frac{x}{x + \sin x}\right\}_{x=\infty}$.

---

79. Пр. $\left\{\frac{x^2 + 1}{\operatorname{cotg} x \cdot \lg(1 + x + x^2)}\right\}_{x=0}$. 80. Пр. $(x^m \lg x)_{x=0}$, $m > 0$.

81. Пр. $\left\{\operatorname{tg}(x^2\sqrt{x}) \cdot \sec\frac{\pi + 2x^2}{2}\right\}_{x=0}$. 82. $\lim \operatorname{tg} 2x \cot\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ при $x = \frac{\pi}{4}$.

83. Найти $y = \lim \left|\arcsin\frac{x - a}{a} \operatorname{cotg}(x - a)\right|_{x=a}$.

84. Найти $y = \lim \left|(1 - x) \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right|_{x=1}$.

85. Найти значение функции $\lg x \lg(1 - x)$ при $x = 1$.

---

86. Пр. $(\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1} - x)_{x=\infty}$.

87. Найти значение функции $\frac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \frac{4}{x^4}$ при $x = 0$.

88. Найти $y = \lim \left\{x - x^2 \lg\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right\}_{\text{при } x=\infty}$.

89. $\lim \left\{\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{2x} + 1)}\right\}$ при $x = 0$. 90. $\lim \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right)$ при $x = 0$.

91. $\lim \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x}\right)$ при $x = 0$. 92. $\lim \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$ при $x = 0$.

93. $\lim \left\{\frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{x(e^{2x\pi} - 1)}\right\}$ при $x = 0$. 94. $\lim \left\{\frac{2 + \cos x}{x^2 \sin x} - \frac{3}{x^4}\right\}$ при $x = 0$.

95. $\lim \left(\frac{1}{x(1 + x)} - \frac{\lg(1 + x)}{x^2}\right)$ при $x = 0$. 96. Пр. $(\lg_a x)^{\operatorname{cotg}(x-a)}$ при $x = a$.

---

97. Пр. $\left\{\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)\right]^{\operatorname{cotg} x}\right\}_{x=0}$. 98. Пр. $\left\{(e^{-x} + 1)^{\operatorname{cotg}\frac{1}{x}}\right\}_{x=\infty}$.

99. Пр. $\left\{(1 - 2\sin^2 x)^{b \operatorname{cotg}^2 x}\right\}_{x=0}$.

100. Найти $y = \lim \left|\frac{a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + a_3^{\frac{1}{x}} \ldots + \ldots a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right|^{nx}_{\text{при } x=\infty}$.

101. $y = \lim \left[\cos 2mx\right]^{\frac{n}{x^2}}_{x=0}$.

102. $y = \lim \left[\sin x^{tg\, x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}$

103. $y = \lim \left(\cos\sqrt{\frac{2a}{x}}\right)^{x}_{\text{при } x=\infty}$.

104. $y = \lim \left[2 - \frac{2x}{\pi}\right]^{tg\, x}_{\text{при } x=\frac{\pi}{2}}$

105 $\lim \left(\frac{tg\, x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ при $x = 0$

105 $\lim \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ при $x = 0$

107. Пр. $(\sin 3x)^{\frac{2}{tg\, x}}_{\text{при } x=0}$

108 Пр. $(\sqrt{b + \sin x})^{\frac{1}{x}}_{x=0}$

109 $\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{x}}_{\text{при } x=\infty}$

110 Пр. $\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\, 2x}_{\text{при } x=0}$

111. Пр. $(tg\, x)^{\cot g\, x}_{\text{пр. } x=\frac{\pi}{2}}$.

112 Пр. $(tg\, x)^{\frac{1}{\log \sin x}}_{\text{при } x=0}$.

113. Пред. $\left[\frac{p + \cos\frac{\sqrt{350(p+1)}}{5n\sqrt{p+7}}}{p+1}\right]^{n^2}_{\text{при } n=\infty}$.

114 Пред $\left[\frac{1}{x^2 - 1}\, lg\, \frac{\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1 + x\cos\varphi}}\right]_{\text{пред. } x=1}$

115. Пред. $\left[\frac{\cos^n x}{tg^{na}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}\right]_{\text{пред } x=-\frac{\pi}{2}}$, гдѣ $a < 1$.

Указаніе: Въ производныхъ $\left[\sin x \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]$ при $x = \frac{\pi}{2}$ равно постоянной величинѣ.

116. $y = P\left[e + \left(e + \frac{q}{Px^2}\right)\left(\sec\frac{1}{2}xl - 1\right)\right]$. Найти предѣлъ y при пред. $x = 0$, P, q, e и l — постоянныя.

Основные примѣры на maximum и minimum функцій отъ одной перемѣнной.

Найти *max.* и *min.* функціи **117.** $y = e^x \cos x$. **118.** $y = e^x \operatorname{cosec} x$. **119.** $y = x^{\frac{1}{x}}$.

120. Найти maxima и minima функціи, $y = x^5\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$, заданной въ промежуткѣ $-2 \leqq x \leqq 2$.

121 Найти maxima и minima функціи $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2(x + 1)}$, заданной въ промежуткѣ $-2 \leqq x \leqq 2$

122. Найти maxima и minima функціи $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

123. Найти всѣ maxima и minima функціи $y = 2\sin 2x + \sin 4x$ Выяснить, каковъ періодъ данной періодической функціи

Найти всѣ maxima и minima функціи **124** $y = \sin x - 3\sin\frac{x}{3}$

125. $y = 2\cos\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{3}$.

126. $y = \sin x \sin(a + x)$

127. Найти maxima и minima функціи $y = \arcsin\sqrt{1 - x^2}$ при $-1 \leq x \leq 1$.

128. Найти maxima и minima функціи $y = \arcsin(\sin x)$ непрерывной въ промежуткѣ $(-\infty, +\infty)$.

129. Найти maxima и minima функціи $z = a^2\cos^2 x + b^2\cos^2 y$ при условіи $x + y = \frac{\pi}{4}$.

130. Опредѣлить a, b, c и d такимъ образомъ, чтобы функція $ax^3 + bx^2 + cx + d$ была maximum при $x = 1$ и minimum при $x = 2$ и обращалась въ нуль при $x = -1$.

131. Найти max. и min функціи $y = \frac{\sin x\,(1 - e^2)}{1 - e^2\cos^2 x}$ $(e^2 < 1)$. Разсмотрѣть два случая: 2 $\frac{1}{e^2} > 0$ и 2 $\frac{1}{e^2} < 0$.

132. Найти max. и min функціи y, опредѣляемой уравненіемъ $x^3 + y^3 = 3a^2x$.

133. Найти max. и min. отъ $y = y^2 + 2yx^2 - 4x - 3$.

134. Функція y задана неявно уравненіемъ $x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Найти ея maxima и minima.

135. Функція y задана неявно уравненіемъ $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$. Найти ея maxima и minima, наибольшее и наименьшее значенія.

136. Найти maxima и minima функціи y, заданной неявно уравненіемъ $x^2 + 4xy + 4y^2 - x - 2y - 1 = 0$.

137. Найти maxima и minima функціи y, заданной неявно уравненіемъ $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 5 = 0$.

Построеніе графиковъ функцій.

Построить графикъ функціи. **138.** $y = \sqrt[3]{x}$. **139.** $y = |x|$.

140. $y = x^3(x-1)^2$. **141.** $y = (x-1)^2(x-2)$.

142. $y = (x+1)^2(x-2)^4$. **143.** $y = \frac{x-1}{x^2 + 3x + 4}$.

144. $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$. **145.** $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$.

146. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$. **147.** $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

148. $y = \frac{(1+x^2)^3}{(a^2+b^2x^2)(a^2x^2+b^2)^2}$ $(a^2 > b^2)$.

149. Прослѣдить за измѣненіемъ функціи $y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$ въ промежуткѣ $(-\infty, +\infty)$.

150. Прослѣдить за измѣненіемъ функціи $y = \sqrt{x + \sqrt{x+1}} - \sqrt{x - \sqrt{x} + 1}$ въ промежуткѣ $(-\infty, +\infty)$.

Построить графикъ функціи **151.** $y = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}$. **152.** $y = \frac{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}{x+1}$.

153. $y = x - \sqrt[3]{x^3 + 1}$. **154.** $y = x\sqrt{x^2 + 1} - x^2$.

155. $y = x^{\frac{4}{3}}(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$. **156.** $y = 2x + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

157. $y = (x-1)^3\sqrt{x-2}$. **158.** $y = (x-1)^3\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

159. $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$. **160.** $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}$.

161. $y = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$. **162.** $y = x^2 - \sqrt{x^4 + 1}$.

163. $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$. **164.** $y = \pm\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

165. $y = \pm\frac{x}{\sqrt{x+1}}$. **166.** $y = \pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

167. $y = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x+1}$. **168.** $y = \pm\frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

171. $y = \pm \frac{x\sqrt{1-x}}{1+x}$.

172. Показать, что $\lg \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{8}\pi + \frac{x}{4}\right)} + \lg\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{4}\right)$ постоянной величинѣ.

Построить графикъ функции.

173. $y = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

174. $y = \cos^3 x + \sin^3 x$

175. $y = \cos^4 x + \sin^4 x$

176. $y = \cos^6 x + \sin^6 x$.

177. $y = 3\sin^2 x - \sin 3x$

178. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$.

179. $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

180. $y = \frac{\sin^2 x}{2 + \sin x}$.

181. $y = \frac{\cos 2x}{\cos x}$

182. $y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$

183. $y = \sin x + \frac{1}{2\sin x}$

184. $y = \sin x + \frac{3}{4\sin x}$

185. $y = \frac{\sin(x-a)}{\sin^4 x}$ $\left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$. Область измѣненія x: $0 \leqq x \leqq \pi$.

186. $y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

187. $y = \operatorname{arctg} x - \frac{9x + 7x^3}{(1+x^2)(9+x^2)}$

188. Прослѣдить характеръ измѣненія функции $y = \frac{\arcsin x}{2} - \sqrt{1-x^2}$, заданной въ промежуткѣ $1 \leqq x \leqq 1$.

189. Указать точки перегиба и разрыва кривой, изображаемой уравненіемъ $y + x = \operatorname{tg} x$.

190. Построить графикъ функции $y = \frac{\log x}{x^a}$ $(a > 0)$.

191. Изучить функцію $y = \frac{a\log x - x}{x^2}$ $(a > 0)$ и представить ее графически при различныхъ значеніяхъ a.

192. Построить графикъ функціи $y = \log(x^2 - 3x + 2)$.

193. Изучить функцію y и представить ее графически, если $y = \lg\left(\frac{x^2-5x+6}{x-1}\right)$, при чемъ указано, что значенія x не превосходятъ 5, т. е. $x \leqq 5$.

194. Изучить функцію y и представить графически ея измѣненіе, если $y = \lg\frac{1}{x+2}$.

195. Изучить функцію y и представить графически ея измѣненіе, если $y = e - \lg(1+x)$.

196. Изучить функцію y и представить графически ея измѣнен.е. если $y = \frac{x^2}{2} - \lg x$. Построить графикъ функціи. 197. $y = e^x + e^{-x} - 2\cos x$.

198. $y = \frac{\sin x}{x^3}$. Независимое перемѣнное измѣняется отъ 0 до π

199. $y = e^{-x^2}\sqrt{2 + 9x^4}$

200. $y = \frac{x(2+\cos x)}{\sin x}$, при $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$

Указаніе: Изслѣдовать знакъ второй производной y''.

201. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Область измѣненія x: $x \geqq 0$.

Указаніе. Изслѣдовать знакъ второй производной y''

202. $y = xe^{\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\sin\alpha}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

203. Показать, что сумма $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ при $x > 0$ и найти ея значеніе при $x < 0$.

Разныя задачи на maxima и minima.

204. Опредѣлить число вещественныхъ корней уравненія $e^{-x} + x = 0$.

205. Сколько веществ. корней имѣетъ уравненіе $12x^4 + 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0$?

206. При какихъ значеніяхъ параметра k уравненіе $3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x + k = 0$ имѣетъ два различные вещ. корня?

207. При какихъ значеніяхъ параметра k уравненіе $2x^3 - 13x^2 - 20x + k = 0$ имѣетъ одинъ веществ. корень?

208. При какихъ значеніяхъ параметра k уравн. $x^3 - 6x^2 + 9x + k = 0$ имѣетъ одинъ веществ. корень?

209. При какихъ значеніяхъ параметра k уравн. $3x^4 - 14x^3 - 15x^2 + k = 0$ имѣетъ 4 различные веществ. корня?

Сколько вещественныхъ корней имѣютъ уравненія: **210.** $x^4 - 4ax^3 - 2 = 0$

211. $3x^4 - 4x^3 + ax^2 - 1 = 0$. **212.** $2x^3 - 3ax^2 + 1 = 0$.

213. При какихъ значеніяхъ параметра k уравн. $2x^3 - 4x^2 - 30x + k = 0$ имѣетъ два совпадающихъ веществ. корня?

214. При какихъ значеніяхъ параметра k уравн. $x^2 - x - \lg x + k = 0$ не имѣетъ веществ. корней?

215. При какихъ значеніяхъ параметра k уравненіе $x^2 - 17x + \lg(x^2) + k = 0$ имѣетъ два веществ. корня?

216. При какихъ значеніяхъ параметра k кривая, изображаемая уравненіемъ $y = 2\sin^2 x - x + k$ касается оси абсциссъ въ промежуткѣ $0 < x < \pi$?

217. При какомъ значеніи параметра k уравненіе $x^2 + x + e^{-x} + k = 0$ имѣетъ два совпадающіе корня?

218. Прослѣдить характеръ измѣненія функціи $y = \lg(x^6) - x + 10\,\mathrm{arctg}\,x$.

219. Указать границы, между которыми находятся веществ. корни уравн. $x \lg x = 3$.

Сколько вещественныхъ корней имѣютъ уравненія **220.** $\frac{\log x}{x} = a$.

221. $a = x \log x$. **222.** $\left(\frac{5}{6}\right)^x + \frac{x}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \frac{1}{2}$.

223. Какому условію должно удовлетворять основаніе системы логариѳмовъ для того, чтобы при этомъ основаніи были числа равныя своимъ логариѳмамъ?

---

224. Доказать неравенство $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$ при $x > 0$.

225. Доказать неравенство $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

226. Доказать, что $\frac{e^x}{x} > e$, если $x > 1$.

227. Доказать, что $\frac{1+x}{1-x} > e^{2x}$, если $0 < x < 1$.

Доказать неравенства: **228.** $\mathrm{tg}\,x > x + \frac{x^3}{3}\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$.

229. $\frac{e}{2x+2} < e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \frac{e}{2x+1}$.

230. $\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^p \geqq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ p \geqq 1)$. *Указаніе:* Положить $\frac{y}{x} = z$.

231. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} < \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x^2}$ $(x > 0)$.

232. $\frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,x + \frac{2}{3}\sin x > x \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$.

233. $\frac{2x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4}{2+x} < \log(1+x) < \frac{2x + \frac{1}{6}x^3}{2+x}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$

234. $\frac{5x + \frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{35}x^7}{5+3x^2} < \mathrm{arctg}\,x < \frac{5x + \frac{4}{3}x^3}{5+3x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$

235. $\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}(1+y)} - \sqrt[n]{x^{n-1}y} - 1 \geqq 0$ ($x \geqq 0$, $y > 0$ и $n = 1$).

236. Ариѳметическая и геометрическая прогрессіи съ положительными членами имѣютъ одинаковые крайніе члены и одно и то же число членовъ. Для которой изъ нихъ сумма членовъ будетъ больше?

---

237. Найти max. объема цилиндра, периметръ осевого сѣченія котораго равенъ k.

238. Найти max. объема конуса, вписаннаго въ шаръ, радіусъ котораго равенъ R.

239. Изъ цилиндровъ, вписанныхъ въ данный шаръ, какой имѣетъ наибольшій объемъ?

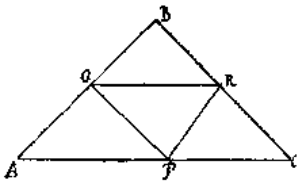
240. Два пункта A и B находятся на разныхъ берегахъ рѣки ширины h. Требуется соединить A и B дорогой наименьшей длины, построивъ мостъ длины h перпендикулярно къ берегамъ рѣки, параллельнымъ между собою.

241. Около полушара требуется описать конусъ наименьшаго объема, основаніе конуса совпадаетъ съ основаніемъ полушара.

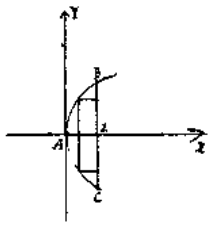
242. По краямъ прямоугольной пластинки вырѣзаны четыре квадрата; остающаяся часть сложена въ коробочку. Каковы должны быть вырѣзанныя части, чтобы объемъ коробочки былъ наибольшій?

243. Въ треугольникѣ ABC на основаніи $AC = m$, дана точка P. Требуется провести $QR \parallel AC$ такъ, чтобы площадь тр-ка PQR была наибольшая (черт. 21).

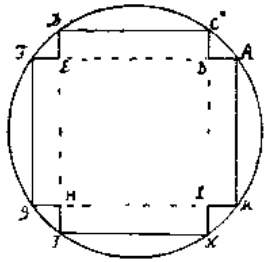
244. Въ параболическомъ сегментѣ $ABCD$ параболы $y^2 = 2px$, въ которомъ хорда BC перпендикулярна къ оси параболы AX, вписать прямоугольникъ наибольшей площади, $AD = a$ (черт. 22).



Черт. 21.



Черт. 22



Черт. 23.

245. Въ данный кругъ вписать крестообразную фигуру $ABCDEFGHJKLM$ наибольшей площади, $AM = FG = CD = JK$ (черт. 23).

246. Построить равнобочную трапецію, которая при данной площади имѣла бы наименьшій периметръ: уголъ при основаніи трапеціи $= \alpha$.

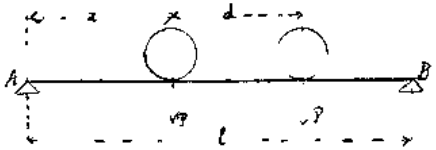
247. Описать около даннаго цилиндра прямой конусъ наименьшаго объема если плоскости и центры круговыхъ основаній цилиндра и конуса совпадаютъ.

248. Изъ листа, имѣющаго форму круга радіуса R, вырѣзать такой секторъ чтобы, свернувъ его получить воронку наибольшей вмѣстимости.

249. Сосудъ состоитъ изъ цилиндра, заканчивающагося снизу конусомъ, высота котораго равна радіусу основанія. Каковы должны быть размѣры цилиндра и конуса для того, чтобы при данной поверхности сосудъ имѣлъ наибольшій объемъ?

250. Тѣло состоитъ изъ цилиндра и двухъ конусовъ, построенныхъ извнѣ на основаніяхъ цилиндра. Это тѣло вписано въ шаръ такъ, что основанія и вершины конусовъ лежатъ на поверхности шара. Когда такое тѣло имѣетъ наибольшій объемъ?

251. По балкѣ AB пролетомъ l, свободно лежащей на двухъ опорахъ A и B перемѣщается система изъ двухъ неизмѣнно связанныхъ равныхъ грузовъ P, разстояніе между которыми есть d. Найти положеніе системы, при которомъ получится max. момента подъ грузомъ ближайшимъ къ опорѣ A (черт. 24).



Черт. 24.

Указаніе. Моментъ равенъ Ax, гдѣ A есть сопротивл. опоры A.

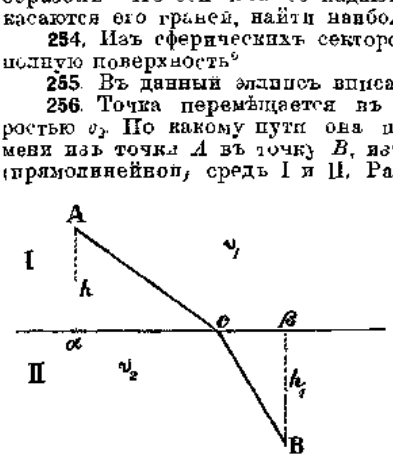
252 Найти круговой цилиндръ наибольшаго объема ось котораго пересѣкаетъ подъ прямымъ угломъ ось даннаго кругового цилиндра, а окружности оснований касаются этого послѣдняго.

253. Изъ всѣхъ круговыхъ цилиндровъ, вписанныхъ въ данный кубъ такимъ образомъ что оси ихъ совпадаютъ съ діагональю куба, а окружности оснований касаются его граней, найти наибольшій по объему.

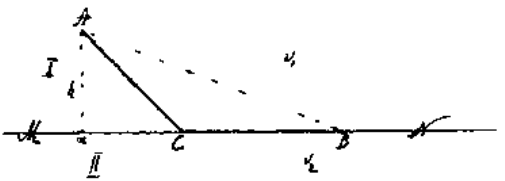
254. Изъ сферическихъ секторовъ даннаго объема какой имѣетъ наименьшую полную поверхность?

255. Въ данный эллипсъ вписать прямоугольникъ наибольшей площади

256. Точка перемѣщается въ средѣ I со скоростью v_1, въ средѣ II со скоростью v_2. По какому пути она перемѣстится въ наименьшій промежутокъ времени изъ точки A въ точку B, изъ которыхъ ни одна не расположена на границѣ (прямолинейной) средъ I и II. Разстоянія точекъ A и B отъ границы MN равны h и h_1; разстояніе проекціи α точки A на границу MN отъ такой проекціи точки B, или длина $\alpha\beta$ a (черт 25).



Черт 25.



Черт. 26.

257. Точка перемѣщается въ средѣ I со скоростью v_1, въ средѣ II со скоростью v_2. По какому пути она перемѣстится въ наименьшій промежутокъ времени изъ точки A въ точку B, расположенную на границѣ MN (прямолинейной) средъ I и II. Разстояніе точки A отъ границы MN равно h, разстояніе проекціи α точки A на границу MN отъ B равно a (черт. 26).

258. Въ данный сегментъ требуется вписать прямоугольникъ наибольшаго периметра.

259. Въ данный секторъ требуется вписать прямоугольникъ наибольшаго периметра.

260 Вписать въ данный шаръ правильную треугольную призму наибольшаго объема.

261 Данъ кругъ радуса R и хорда AB. Провести хорду AC такъ, чтобы діагональ AD параллелограмма, построеннаго на прямыхъ AB и AC, была наибольшая или наименьшая.

262 Даны сфера и плоскость. Гдѣ должна находиться вершина прямого кругового конуса, касающагося сферы и имѣющаго основаніе въ данной плоскости, для того, чтобы объемъ его былъ наименьшимъ?

263. Два тѣла, двигающіяся равномѣрно по прямымъ AO и $A'O$ со скоростями V и V', выходятъ одновременно изъ точекъ A и A' по направленію къ O ($OA = l$, $OA' = l$). Въ какой моментъ разстояніе между ними будетъ наименьшее?

264. Найти max. боков. пов. кругового конуса, вершина котораго находится въ центрѣ эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$, высота направлена по большей оси, а одинъ изъ діаметровъ основанія есть хорда.

265 Три совершенно упругихъ шара A, B, C расположены такъ, что ихъ центры находятся на одной прямой. Масса шара A равна M, масса шара C равна m. Шаръ A со скоростью V ударяетъ въ шаръ B, который получая извѣстную скорость, ударяетъ въ шаръ C. Какова должна быть масса шара B, чтобы скорость шара C оказалась наибольшею?

Указаніе При совершенно упругомъ ударѣ двухъ шаровъ, имѣющихъ массы m_1 и m_2, движущихся со скоростями a_1 и a_2, скорость шара m_1 послѣ удара

$$v_1 = \frac{2m_1a_2 + (m_1 - m_2)\,a_1}{m_1 + m_2}.$$

266. Рычагъ второго рода имѣетъ точку опоры въ A, въ точкѣ B ($AB = a$) подвѣшенъ грузъ P. Вѣсъ единицы длины рычага $= K$. Какова должна быть длина рычага, чтобы грузъ P уравновѣшивался наименьшей силой?

267. Требуется построить цилиндръ, открытый сверху, стѣнки и дно котораго

имѣютъ данную толщину. Каковы должны быть размѣры цилиндра, чтобы при данной вмѣстимости на него пошло наименьшее количество матеріала?

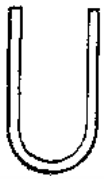
268. Требуется построить сосудъ, состоящій изъ цилиндра, заканчивающагося снизу полусферой, толщина стѣнокъ постоянна. Каковы должны быть размѣры сосуда чтобы при данной вмѣстимости на него пошло наименьшее количество матеріала (черт. 27).

269. Требуется построить котелъ, состоящій изъ цилиндра, завершеннаго двумя полусферами, со стѣнками постоянной толщины такъ, чтобы при данной вмѣстимости онъ имѣлъ наименьшую наружную поверхность.

270. Изъ всѣхъ прямыхъ конусовъ, описанныхъ около даннаго шара, найти такой, который имѣетъ наименьшій объемъ?

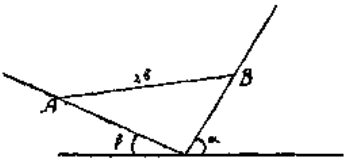
271. Чашка имѣетъ форму полусферы радиуса R съ горизонтальнымъ основаніемъ. Въ нее опущенъ стержень длины $l > 2R$. При какомъ положеніи стержня середина его находится всего ниже (черт. 28)?

272. Стержень данной длины $2b$ опирается концами на двѣ прямыя, находящіяся въ вертикальной плоскости и наклоненныя къ горизонтальной линіи подъ

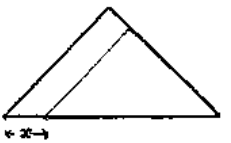


Черт. 27.

Черт. 28.



Черт. 29.



Черт. 30.

углами α и β. При какомъ положеніи стержня его середина находится всего выше (черт. 29)?

273. Прямой круговой конусъ пересѣкается плоскостью по параболическому сегменту. При какомъ положеніи плоскости площадь этого сегмента будетъ наибольшею (черт. 30)?

274. Прямой круговой конусъ требуется пересѣчь по эллипсу наибольшей площади.

275. Къ параболѣ требуется провести такую нормаль, чтобы площадь отсѣкаемаго ею сегмента была наименьшею.

276. Черезъ точку P внутри даннаго круга провести взаимно перпендикулярныя хорды APC и BPD такъ, чтобы площадь четыреугольника $ABCD$ была наибольшая.

277. Треугольная пирамида пересѣкается плоскостью, параллельною двумъ противоположнымъ ребрамъ. При какомъ положеніи сѣкущей плоскости площадь сѣченія будетъ наибольшею?

278. Найти max. площади прямоугольника, зная, что сумма всѣхъ его сторонъ и діагоналей равна K.

279. Основаніемъ полусферы служитъ кругъ радиуса R. Въ этотъ кругъ требуется вписать такой прямоугольникъ, чтобы прямая призма, имѣющая его своимъ основаніемъ вырѣзывала изъ полусферы криволинейный четыреугольникъ наибольшей поверхности.

280. Черезъ точку A внутри угла MON требуется провести прямую такъ, чтобы площадь треугольника, составляемаго ею со сторонами угла, была наименьшая.

281. Черезъ точку A внутри угла MON требуется провести прямую такъ, чтобы сумма отрѣзковъ OM и ON, образуемыхъ ею на сторонахъ угла, была наименьшая.

282. Данъ прямой уголъ MON и точка A внутри его. Черезъ точку A требуется провести прямую такъ, чтобы отрѣзокъ ея между сторонами угла имѣлъ наименьшую длину.

283. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ съ данною высотою h, какой имѣетъ наименьшій периметръ?

284. Данъ кругъ и прямая, касающаяся его въ точкѣ A. Провести хорду BC, параллельную этой прямой такъ, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшая.

285. Даны двѣ прямыя OA и OB ($OB = a$, OB — горизонтальна), составляющія уголъ α. Въ какой точкѣ прямой OA слѣдуетъ помѣстить источникъ свѣта дан-

наго напряженія, чтобы освѣщеніе малой горизонтальной площадки около точки B было наибольшимъ?

286. Свѣтящаяся точка находится на линіи центровъ сферъ радіусовъ R и R между центрами. При какомъ положеніи ея сумма освѣщенныхъ частей сферъ будетъ наибольшею?

287. Двѣ касательныя къ данному кругу образуютъ между собой уголъ 2α. Требуется провести третью касательную такимъ образомъ, чтобы треугольникъ, образованный этими тремя прямыми имѣлъ наименьшую площадь.

288. Діаметръ полуокружности AMB раздѣленъ точкой C на части AC и CB. На AC и CB описаны полуокружности ANC и CPB. Какъ должна быть выбрана точка C, чтобы кругъ, касающійся трехъ полуокружностей, имѣлъ наибольшій радіусъ?

Maxima и minima функцій отъ многихъ перемѣнныхъ независимыхъ.

289. Найти max и min. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

290. Найти наименьшее значеніе функціи $f = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$ при $x > 0$, $y > 0$.

291. Найти наибольшее и наименьшее значеніе функціи $f = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ при условіяхъ $0 \leqq x \leqq a$; $0 \leqq y \leqq a$ $(a > 3)$.

292. Найти наибольшее и наименьшее значеніе функціи $f = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ при условіяхъ: $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq a$ $(a \geqq 1)$.

293. Найти наибольшее значеніе функціи $f = e^{-x^2 - y^2 - ax + by^2}$, $a > 0$, $b > 0$.

294. Найти наибольшее и наименьшее значеніе функціи $f = \cos x \cos y \cos(x + y)$, $(0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi)$.

Изслѣдовать поверхности: **286.** $z = x^2y^2(a - x - y)$

286. $z = (a \cos x + b \cos y)^2 + (a \sin x + b \sin y)^2$.

297. Найти наименьшее значеніе функціи $f = \frac{2x}{y + z} + \frac{2y}{x + z} + \frac{2z}{x + y}$ при $x > 0$, $y > 0$; $z > 0$.

298. Доказать справедливость неравенства $\frac{x^p + y^p + \ldots + t^p}{k} \geqq \left(\frac{x + y + \ldots + t}{k}\right)^p$ при $p > 1$ и $x \geqq 0$, $y \geqq 0, \ldots t \geqq 0$. Черезъ k обозначено число величинъ $x, y, \ldots t$.

299. Найти наибольшее значеніе функціи

$$f = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)\ldots(x_{n-1} + x_n)(x_n + b)}$$ при условіяхъ $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0, \ldots x_n \geqq 0$

300. Функція z отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ задана неявно уравненіемъ $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$; найти max. и min. этой функціи.

301. Найти max. и min. функціи z двухъ перемѣнныхъ независимыхъ заданной неявно уравненіемъ $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 72$.

Относительные maxima и minima.

302. Найти наименьшее значеніе функціи $f = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x_n}$ при условіи $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n = P$ $\alpha_i > 0$; $\beta_i > 0$ $x_i > 0$ при $i = 1, 2, 3, \ldots n$.

303. Найти наибольшее и наименьшее значенія функціи $f = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ при условіяхъ. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + 2y + 3z = 0$.

304. Найти наибольшее и наименьшее значенія функціи $f = x^2 + y^2 + z^2$ при условіяхъ $lx + my + nz = 0$; $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$.

305. Найти наибольшее и наименьшее значенія функціи $f = xyz$ при условіяхъ: $x + y + z = 5$; $xy + xz + yz = 8$.

306. Найти наибольшее значеніе функціи $f = x - y$ при условіяхъ: $\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg} y$; $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$; $0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$.

307. Найти наибольшее и наименьшее значенія функціи $f = \sin\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2} \sin\frac{z}{2}$ при условіяхъ. $x + y + z = \pi$; $x \geqq 0$; $y \geqq 0$, $z \geqq 0$.

308. Найти наибольшее значение опредѣлителя $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{2} \cdot a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1}, a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$ при условіяхъ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$ $(i = 1, 2, 3 \ldots n)$

На основаніи полученныхъ результатовъ доказать, что

$|\Delta| \leqq \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2} \cdot \sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2 + \ldots + a_{2n}^2} \ldots \sqrt{a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \ldots + a_{nn}^2}$ (Hadamard).

309. Въ заданный равнобедренный треугольникъ вписать параболу такъ, чтобы равныя стороны его были касательными къ параболѣ, а основаніе отсѣкало отъ нея сегментъ наибольшій по площади.

310. Найти внутри четыреугольника точку, сумма квадратовъ разстояній которой отъ вершинъ фигуры, была бы minimum.

311. Изъ всѣхъ треугольниковъ съ одинаковымъ основаніемъ и однимъ и тѣмъ же угломъ при вершинѣ найти наибольшій по площади.

312. Заданный треугольникъ раздѣлить на двѣ равновеликія части прямою наименьшей длины.

313. Доказать, что въ треугольникѣ радіусъ вписаннаго круга не можетъ быть больше половины радіуса описаннаго круга.

314. Среди четыреугольниковъ со сторонами a, b, c, d найти наибольшій по площади.

315. Требуется провести прямую такъ, чтобы отрѣзокъ ея между осями координатъ былъ виденъ изъ данной точки подъ прямымъ угломъ и имѣлъ наименьшую длину.

316. На плоскости треугольника найти точку, сумма квадратовъ разстояній которой отъ сторонъ треугольника наименьшая.

317. Между сторонами даннаго угла (a, b) провести прямую длины l такъ, чтобы площадь образованнаго ею со сторонами угла треугольника была наибольшая.

318. Изъ всѣхъ плоскостей, проходящихъ черезъ заданную точку, найти наиболѣе удаленную отъ начала координатъ.

319. Найти max. объема параллелопипеда при данной суммѣ $12a$ всѣхъ его реберъ.

320. Найти прямоугольный параллелопипедъ, который имѣетъ наибольшій объемъ при данной полной поверхности.

321. Около прямоугольнаго параллелопипеда со сторонами $2a$, $2b$, $2c$ описать эллипсоидъ наименьшаго объема.

322. Черезъ точку (a, b, c) провести плоскость, образующую съ плоскостями координатъ тетраэдръ наименьшаго объема.

323. Опредѣлить размѣры закрытаго ящика формы прямоугольнаго параллелопипеда съ заданной толщиной стѣнокъ и емкостью v такъ, чтобы на него пошло наименьшее количество матеріала.

324. Найти треугольникъ даннаго периметра, который вращеніемъ около одной изъ своихъ сторонъ производитъ тѣло наибольшаго объема.

325. Изъ всѣхъ треугольныхъ пирамидъ съ даннымъ основаніемъ и данною высотою найти ту, которая имѣетъ наименьшую поверхность.

326. Изъ всѣхъ цилиндровъ, вписанныхъ въ данный прямой круговой конусъ, найти тотъ, который имѣетъ max. объемъ.

327. Въ данный прямой круговой конусъ вписать параллелопипедъ наибольшаго объема.

328. Въ лемнискату $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$ вписана фигура состоящая изъ двухъ равныхъ треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину въ началѣ координатъ, а основаніями хорды параллельныя оси OY. Найти max. ея площади.

329. Найти прямой круговой конусъ, который при данной длинѣ образующей имѣлъ бы наибольшій объемъ.

330. Изъ всѣхъ конусовъ данной боковою поверхностью S опредѣлить конусъ съ наибольшимъ объемомъ.

331. Изъ сосудовъ, имѣющихъ форму усѣченнаго конуса съ образующими, наклоненными къ плоскости основанія подъ угломъ α, найти тотъ, у котораго полная поверхность наименьшая при данномъ объемѣ V.

332. Раздѣлить полуокружность на три дуги, сумма синусовъ которыхъ была бы max.

333. Въ данный кругъ вписать треугольникъ такъ, чтобы сумма квадратовъ его сторонъ была наибольшая.

334. Около даннаго круга описать многоугольникъ состоящій изъ n сторонъ, площадь котораго была бы наименьшая.

335. Въ данный кругъ вписать многоугольникъ, состоящій изъ n сторонъ, площадь котораго была бы наибольшая.

336. Въ данный кругъ вписать наибольшій по площади четыреугольникъ, одинъ изъ угловъ котораго данъ.

337. На окружности эллипса даны двѣ точки; найти на той же окружности третью точку такъ, чтобы треугольникъ имѣющій вершинами указанныя точки, былъ бы наибольшимъ по площади.

338. Найти кратчайшее разстояніе отъ точки $(p, 4p)$ до параболы $y^2 = 2px$.

339. Въ данный эллипсъ вписать равнобедренный треугольникъ съ основаніемъ параллельнымъ большей оси, площадь котораго была бы наибольшая.

340. На окружности эллипса найти точку разстояніе которой отъ точки, заданной на большей полуоси эллипса, было бы min.

341. Около даннаго эллипса описать треугольникъ съ основаніемъ параллельнымъ большой оси, площадь котораго была бы min.

342. Провести къ эллипсу нормаль, наиболѣе удаленную отъ центра.

343. Провести къ эллипсу такую нормаль, чтобы отрѣзокъ ея внутри эллипса имѣлъ наименьшую длину.

344. Найти max суммы длинъ сопряженныхъ полудіаметровъ эллипса.

345. Провести къ эллипсу нормаль такъ, чтобы треугольникъ, образуемый ею съ осями координатъ, имѣлъ наибольшую площадь.

346. Провести къ эллипсу такую касательную, чтобы уголъ, составленный перпендикуляромъ, опущеннымъ на нее изъ центра, и радіусомъ векторомъ, проведеннымъ изъ центра въ точку касанія, былъ наибольшимъ.

347. Провести къ эллипсу такую касательную, чтобы отрѣзокъ ея между осями эллипса былъ наименьшимъ.

348. Найти длины осей эллипса, получаемаго въ сѣченіи цилиндра $x^2 + 2y^2 = 1$ плоскостью $x + y + z = 0$.

349. Найти площадь эллипса, получаемаго въ сѣченіи эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ плоскостью $lx + my + nz = 0$.

350. Провести къ эллипсоиду касательную плоскость такъ, чтобы сумма отрѣзковъ, отсѣкаемыхъ ею на осяхъ координатъ, была бы min.

351. Въ сегментъ эллиптическаго параболоида вписать параллелопипедъ наибольшаго объема.

352. Провести къ эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ такую касательную плоскость, чтобы центръ тяжести треугольника, получаемаго въ пересѣченіи ея съ плоскостями координатъ, находился въ наименьшемъ разстояніи отъ начала.

353. Къ эллипсоиду провести касательную плоскость, образующую съ плоскостями симметріи эллипсоида, тетраэдръ наименьшаго объема.

ОТДѢЛЪ V.

Геометрическія приложенія дифференціальнаго исчисленія.

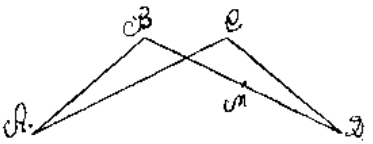
I. Плоскія кривыя.

Нахожденіе уравненій кривыхъ по заданнымъ геометрическимъ условіямъ.

1. Прямая данной длины l скользитъ своими концами A и B по двумъ перпендикулярнымъ прямымъ OX и OY. Изъ вершины C прямоугольника $OACB$ на движущуюся прямую опускается перпендикуляръ. Найти геометрическое мѣсто основанія этого перпендикуляра.

2. Черезъ точку A, взятую на окружности круга, проводятъ сѣкущую, которая встрѣчаетъ кругъ въ точкѣ D. По прямой AD отъ точки D съ той и другой стороны откладываютъ отрѣзки DM и DN данной длины. Построить кривую (называемую улиткой Паскаля), описываемую точками M и N при вращеніи сѣкущей около A. Разсмотрѣть частный случай этой кривой, когда длина DM равна діаметру круга.

3. Четыреугольникъ $ABCD$ состоитъ изъ 4-хъ стержней, связанныхъ шарнирами въ вершинахъ A, B, C, D. Длины стержней удовлетворяютъ условіямъ: $AC = BD$; $AB = CD$; $AC = AB\sqrt{2}$, точки A и C закрѣплены неподвижно. Какую линію описываетъ середина стержня BD при движеніи системы (черт. 31)?



Черт. 31.

4. Двѣ равныя параболы вращаются около своихъ вершинъ такимъ образомъ, что четыре точки ихъ пересѣченія всегда лежатъ на окружности круга. Найти геометрическое мѣсто центра этого круга.

5. Найти геометрическое мѣсто вершины или фокуса равнобочной гиперболы, центръ которой данъ, и которая проходитъ черезъ данную точку.

6. Найти геометрическое мѣсто вершины параболы, катящейся по параболѣ равной величины.

7. Координаты точекъ Декартова листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ могутъ быть представлены рациональными функціями параметра t слѣдующимъ образомъ: $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$. Вывести условіе, при которомъ три точки, соотвѣтствующія значеніямъ параметра t_1, t_2, t_3, лежатъ на одной прямой.

8. Доказать, что координаты точекъ кардіоды $\rho = 2a(1+\cos\theta)$ выражаются слѣдующими рациональными функціями параметра t: $x = \frac{4a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$, $y = \frac{8at}{1+t^2}$. Вывести условіе, при которомъ три точки кардіоиды, соотвѣтствующія значеніямъ параметра t_1, t_2, t_3, лежатъ на одной прямой. Найти уравненіе касательной въ точкѣ съ параметромъ t.

9. Координаты точекъ строфоиды $y^2 = (x-a)^2\frac{x}{2a-x}$ выражаются слѣдующими

рациональными функціями параметра t $x = \frac{2at}{1+t^2}$, $y = a\frac{t(t^2-1)}{t^2+1}$. Найти, при какомъ условіи три точки строфоиды, соотвѣтствующія значеніямъ параметра t_1, t_2, t_3, лежатъ на одной прямой.

10. Найти условіе, при которомъ четыре точки строфоиды, соотвѣтствующія значеніямъ параметра t_1, t_2, t_3, t_4 лежатъ на одной окружности.

11. Координаты точекъ циссоиды $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ выражаются слѣдующими рациональными функціями параметра t: $x = \frac{a}{t^2+1}$, $y = \frac{a}{(t^2+1)}$. Найти условіе, при которомъ четыре точки, соотвѣтствующія значеніямъ параметра t_1, t_2, t_3, t_4, лежатъ на одной окружности.

Касательныя и нормали.

Провести касательную къ кривой **12.** $y = x\lg x + 1$ въ точкѣ съ ординатою $y = 1$.
13. $2x^3 - x^2y^2 - 3x + y - 6 = 0$ въ точкѣ $(1, -2)$.
14. $x^3 - y^3 - 3x^2$ параллельную прямой $y = x$.
15. $x = e^t$, $y = \sin t$ въ точкѣ $t = 0$.

16. Касательныя къ кривымъ $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, $y = \frac{\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)}{\lambda + \mu}$ въ точкахъ, соотвѣтствующихъ одинаковымъ абсциссамъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

17. Найти уравненіе той касательной къ эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, у которой отрѣзокъ ея между осями координатъ точкой касанія дѣлится пополамъ.

18. Доказать, что отрѣзокъ касательной кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, заключенный между осями координатъ, имѣетъ постоянную длину.

19. Доказать, что кривая $\frac{x + \sqrt{a^2 - y^2}}{2} - \log\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ имѣетъ постоянную длину касательной.

20. Доказать, что параболы $y^2 = 2ax + a^2$ и $y^2 = -2bx + b^2$ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

21. Доказать, что кривыя $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ и $(x^2+y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)$, пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

22. Доказать, что однофокусные эллипсъ и гипербола пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

23. Доказать, что въ любой точкѣ кривой $e^{\frac{y}{a}} = x^2 - a^2$ сумма длинъ касательной и подкасательной пропорціональна произведенію координатъ точки.

24. Доказать, что кривыя $\rho^2 = \log tg\,\vartheta$ и $\rho^2\cos 2\vartheta + 1 = 0$ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

25. Доказать, что кривыя $\rho^2 = \frac{c^2}{\cos 2\vartheta}$ и $\rho^2 = \frac{c_1^2}{\cos(2\vartheta + \alpha)}$ пересѣкаются подъ угломъ α.

26. Подъ какими углами пересѣкаетъ полярную ось спираль Архимеда $\rho = R\vartheta$.

27. Доказать, что точки касанія касательныхъ, проведенныхъ изъ данной точки къ логариѳмической спирали $\rho = ae^{m\vartheta}$, лежатъ на окружности круга, проходящую черезъ полюсъ и черезъ данную точку.

28. Каждый радіусъ векторъ кривой $\rho = a\sin^3\frac{\vartheta}{3}$ пересѣкаетъ ее въ трехъ точкахъ, отличныхъ отъ полюса. Доказать, что касательныя въ этихъ точкахъ образуютъ равносторонній треугольникъ.

29. Доказать, что углы между касательными къ кривымъ $\rho = \varphi(\vartheta)$ и $\rho = \frac{a}{\varphi(\vartheta)}$ и радіусомъ векторомъ составляютъ въ суммѣ π.

30. Найти уголъ между касательной и радіусомъ векторомъ кривой $\rho^n = a^n\cos n\vartheta$.

31. Доказать, что полярныя подкасательныя къ кривымъ $\rho = \varphi(\vartheta)$ и $\rho = \frac{a\varphi(\vartheta)}{a + \varphi(\vartheta)}$ въ точкахъ, лежащихъ на одномъ радіусѣ векторѣ, равны.

32. Найти длину полярной подкасательной и поднормали для спирали $\rho^2 = a^2\varphi$.

33. На диссоидѣ берется произвольная точка M_1. Затѣмъ проводится касательная въ точкѣ M_1, пересѣкающая кривую въ точкѣ M_2 касательная въ M_2 пересѣкаетъ кривую въ точкѣ M_3, касательная въ M_3 пересѣкаетъ кривую въ точкѣ M_4 и т. д. Доказать, что точка M_n безпредѣльно приближается къ началу координатъ при безконечномъ возрастаніи n

34. Въ трехъ точкахъ Декартова листа M_1, M_2, M_3, расположенныхъ на одной прямой, проводятся касательныя, пересѣкающія кривую еще въ точкахъ P_1, P_2, P_3. Доказать, что эти точки лежатъ на одной прямой (См. № 7)

35. Черезъ точку M на строфоидѣ $y^2 = x^2 \frac{a+x}{2a-x}$ проведены двѣ касательныя, касающіяся кривой въ точкахъ P и Q, отличныхъ отъ M. Обозначая черезъ O начало координатъ, доказать, что точки O, M, P, Q лежатъ на окружности круга.

36. Найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ данной точки на касательныя къ данной окружности

37. Найти геометрическое мѣсто проэкцій центра эллипса на касательныя

38. Найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ опущенныхъ изъ центра равнобочной гиперболы на касательныя

39. Дана строфоида $y^2(2a - x) = x(x - a)^2$. Лучъ проходящій черезъ начало, пересѣкаетъ кривую въ точкахъ M и M', отличныхъ отъ начала. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія касательныхъ проведенныхъ къ строфоидѣ въ точкахъ M и M'

40. Эвольвента круга параметрически задается уравненіями $x = R(\cos t + t\sin t)$, $y = R(\sin t - t\cos t)$. Найти геометрическое мѣсто проэкцій начала координатъ на касательныя къ кривой.

41. Найти геометрическое мѣсто проэкціи начала координатъ на касательныя къ кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$

42. Найти геометрическое мѣсто проэкціи полюса на касательныя къ кривой $\rho^n = a^n \cos n\theta$.

43. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія двухъ перпендикулярныхъ прямыхъ касающихся астроиды $x = a\cos^3 z$, $y = a\sin^3 z$.

44. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія касательныхъ къ кривой $4y^3 = 27x^2$ составляющихъ прямой уголъ

45. Найти геометрическое мѣсто вершины угла данной величины, стороны котораго касаются циклоиды. (De la Hire)

46. Изъ данной точки M къ кардоидѣ можно провести вообще три касательныхъ. Каково будетъ геом. мѣсто точки M, если три точки касанія будутъ лежать на одной прямой.

47. Къ темпискатѣ, параллельно данному направленію, вообще можно провести двѣ пары вещественныхъ касательныхъ. Доказать что линіи, соединяющія точки касанія каждой пары, составляютъ между собою уголъ $\frac{2\pi}{3}$

48. Провести нормаль къ кривой $x^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ въ точкѣ съ ординатою $y = 3$.

49. Кривыя $y = f(x)$ и $y = \sqrt{a + [f(x)]^2}$ въ точкахъ съ одинаковой абсциссой имѣютъ равныя поднормали.

50. Доказать, что кривыя $\rho = \varphi(\theta)$ и $\rho = a + \varphi(\theta)$ въ точкахъ расположенныхъ на одномъ радіусѣ векторѣ, имѣютъ равныя полярныя поднормали

51. Къ параболѣ $y^2 = 2px$ провести нормаль такъ, чтобы ея отрѣзокъ между осями координатъ имѣлъ данную длину $\frac{p}{2}\sqrt{18}$

52. Найти уравненіе нормали эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ въ той его точкѣ, гдѣ отрѣзокъ касательной между осями координатъ дѣлится точкой касанія пополамъ.

53. Найти уравненіе нормали къ эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ въ той его точкѣ, для которой отрѣзокъ касательной между осями координатъ имѣетъ наименьшую длину.

54. Доказать, что всякая нормаль къ кривой $x = \frac{2at}{1+t^2}$, $y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$ проходитъ черезъ одну и ту-же точку.

55. Доказать, что отрѣзокъ нормали къ кривой $x = a \sin t + \frac{a}{2} \sin t \cos^2 t$, $y = \frac{a}{2} \cos^3 t$, заключенный между осями OX и OY, имѣетъ постоянную длину a.

56. Дана кривая $x = 2a \lg \sin t - 2a \sin^2 t$, $y = a \sin 2t$. Доказать, что отрѣзокъ оси OX между касательной и нормалью къ этой кривой, имѣетъ постоянную длину $2a$.

57. Нормаль къ лемнискатѣ $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ образуетъ съ полярной осью уголъ $= 3\theta$.

58. Изъ какой-либо точки M кривой $y^2 = ce^{\frac{x}{a}} + 4a(x + a)$ проводится нормаль MP, пересѣкающая ось абсциссъ въ точкѣ P. Доказать, что средина отрѣзка MP лежитъ на параболѣ $y^2 = ax$.

59. Найти геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ можно провести къ параболѣ двѣ взаимно-перпендикулярныя нормали.

Кривизна и радіусъ кривизны.

60. Вычислить координаты центра кривизны кривой $xy = 1$ въ точкѣ $(1,1)$.

61. Найти радіусъ кривизны кривой $3ay^2 = 2x^3$.

62. Найти радіусъ кривизны кривой $x = t^2$, $y = t^3$ въ точкѣ $(1,1)$.

63. Найти радіусъ кривизны и координаты центра кривизны кривой

$y = a \log \cos\left(\frac{x}{a}\right)$, $(a > 0)$.

64. Найти радіусъ кривизны лемнискаты $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

65. Найти радіусъ кривизны гиперболической спирали $\rho\theta = a$.

66. Найти координаты центра кривизны и радіусъ кривизны кардіоиды $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

67. Найти длины нормали и величину радіуса кривизны для цѣпной линіи $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

68. Доказать, что радіусъ кривизны циклоиды равенъ удвоенной длинѣ нормали.

69. Найти радіусъ кривизны и координаты центра кривизны въ той точкѣ кривой $y = x \lg x$, гдѣ касательная къ ней параллельна оси Ox.

70. Найти наименьшій радіусъ кривизны цѣпной линіи $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

71. Найти радіусъ кривизны эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ въ той его точкѣ, гдѣ отрѣзокъ касательной между осями координатъ дѣлится точкой касанія пополамъ.

72. Найти радіусъ кривизны эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ въ той его точкѣ, для которой отрѣзокъ касательной между осями координатъ имѣетъ наименьшую длину.

73. Найти точку на кривой $y = a \lg\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, гдѣ кривизна кривой наибольшая.

74. Найти точку на кривой $y = \lg x$, гдѣ кривизна наибольшая.

75. Для кривыхъ $\rho^m = a^m \cos m\theta$ длина полярной нормали въ $m + 1$ разъ больше радіуса кривизны.

76. Для кривыхъ $\rho^m = a^m \sin m\theta$ часть радіуса вектора, заключенная внутри круга кривизны, равна $\frac{2\rho}{m + 1}$.

77. Въ Архимедовой спирали $\rho = R\theta$ проводится произвольный радіусъ векторъ, который пересѣкаетъ спираль въ безчисленномъ множествѣ точекъ. Доказать, что центры кривизны спирали въ этихъ точкахъ лежатъ на одномъ эллипсѣ, размѣры котораго не зависятъ отъ того, какъ выбранъ радіусъ векторъ.

78. Доказать, что у кривыхъ 2-го порядка радіусъ кривизны пропорціоналенъ кубу длины нормали.

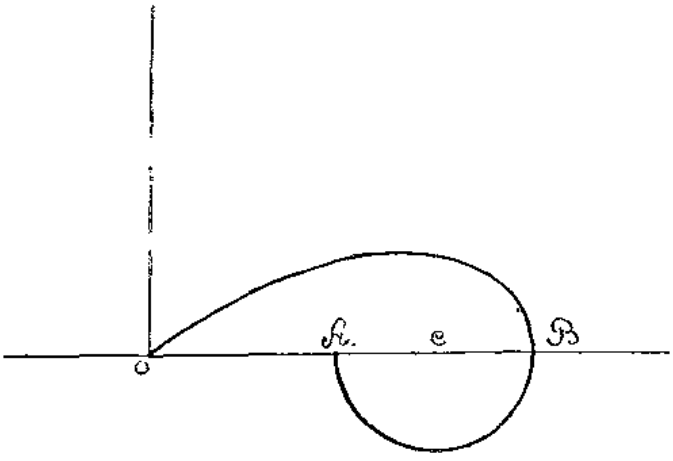
79. Если ρ есть радіусъ векторъ кривой, p — длина перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ на касательную, и R — радіусъ кривизны, то $R = \rho \frac{d\rho}{dp}$.

80. Доказать, что для кривой $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ радіусъ кривизны $\rho = \frac{[(A^2 + B^2)p^2 + (B^2 + C^2)q^2]^{\frac{3}{2}}}{B^2 - AC}$, гдѣ p и q — длины перпендикуляровъ, опущен-

ныхъ изъ точки (x, y) кривой на диаметры, сопряженные съ осями координатъ (Бѣляпкинъ).

81. На эллипсѣ берется точка M. Кругъ кривизны для этой точки пересѣкаетъ эллипсъ еще въ точкѣ P. Доказать, что на эллипсѣ можно найти двѣ точки M' и M'', вообще отличныя отъ M, для которыхъ круги кривизны также приходятъ черезъ точку P.

82. ACB полуокружность, имѣющая центръ въ точкѣ $C(a, 0)$ и радіусъ r. Соединить точки O и B дугою параболы такъ, чтобы получилась кривая, соединяющая точки O и A, имѣющая во всѣхъ точкахъ опредѣленную касательную, непрерывно



Черт. 32

мѣняющійся радіусъ кривизны и чтобы дуга ACB составляла часть кривой. (Черт. 32)

83. Найти геометрическое мѣсто средины хорды, общей эллипсу и его соприкасающемуся кругу.

Эволюты.

84. Найти эволюту кривой $x = a\cos t + at\sin t$, $y = a\sin t - at\cos t$.

85. „ „ кардіоиды $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

86. „ „ астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

87. „ „ цѣпной линіи $y = a\,Ch\frac{x}{a}$.

88. „ „ циссоиды $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.

89. Найти общее выраженіе для эволюты кривыхъ 2-го порядка. (Бѣляпкинъ)

90. Найти эволюту темпискаты

91. Найти эволюту кривой (трактрисы), $x = k\left(\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi\right)$, $y = k\sin\varphi$.

92. Найти эволюту кривой $x = a(1 + \cos^2 t)\sin t$, $y = a\sin^2 t\cos t$.

93. Пользуясь свойствами эволютъ, найти длину дуги эволюты параболы отъ точки пересѣченія эволюты съ осью параболы до точки пересѣченія эволюты съ параболой.

Огибающія кривыя.

94. Найти огибающую касательныхъ къ параболѣ $y^2 = 2px$.

95. Найти огибающую прямой, отсѣкающей отъ заданнаго угла ω треугольникъ постоянной площади $2m^2$.

96. На хордахъ круга, параллельныхъ заданному направленію, какъ на діаметрахъ, описываются окружности. Найти ихъ огибающую.

97. Найти огибающую прямой, соединяющей концы сопряженныхъ діаметровъ эллипса.

98. Прямая перемѣщается такимъ образомъ, что сумма отрѣзковъ, образуемыхъ ею на осяхъ координатъ, постоянна. Найти огибающую этой прямой.

99 Найти огибающую прямой, сумма или разность квадратовъ разстояній которой до двухъ данныхъ точекъ постоянна.

100. Найти огибающую діаметра круга, катящагося безъ скольженія по данной прямой.

101. Вершина даннаго угла OPQ скользитъ по прямой AP, а одна изъ сторонъ проходитъ черезъ точку O. Найти огибающую другой стороны.

102. Квадратъ $ABCD$ неизмѣнной величины перемѣщается на плоскости такимъ образомъ, что стороны его AB и AD постоянно проходятъ черезъ данныя точки E и F. Найти огибающую діагонали BD.

103. Найти огибающую эллипсовъ, имѣющихъ одну и ту же сумму полуосей, равную d.

104. Найти огибающую высотъ треугольника коего вершина A неподвижна, а сторона BC данной длины скользитъ по данной прямой.

105. Изъ данной точки проведенъ рядъ сѣкущихъ къ данному кругу. Найти огибающую круговъ, построенныхъ на полученныхъ хордахъ, какъ на діаметрахъ.

106. Черезъ фокусъ параболы проводятся хорды. Найти огибающую круговъ, описанныхъ на этихъ хордахъ, какъ на діаметрахъ.

107. Найти огибающую системы круговъ, имѣющихъ центры на данномъ эллипсѣ и проходящихъ черезъ центръ сего эллипса.

108. Найти огибающую круговъ, имѣющихъ центръ на параболѣ и проходящихъ черезъ ея вершину.

109. Изъ всѣхъ точекъ параболы $y^2 = 2px$ опущены перпендикуляры на оси координатъ, концы ихъ соединены прямыми. Найти огибающую этихъ прямыхъ.

110. Изъ точекъ кривой $x = a\cos t$; $y = b\sin t$ опускаются перпендикуляры на оси координатъ. Найти огибающую прямыхъ, соединяющихъ основанія этихъ перпендикуляровъ.

111. Въ точкахъ пересѣченія нормалей къ параболѣ съ ея осью возстанавливаются перпендикуляры къ нормалямъ. Найти ихъ огибающую.

112. Свѣтящаяся точка находится на окружности даннаго круга. Найти огибающую (каустику) лучей, отраженныхъ отъ окружности.

113. Лучи свѣта, перпендикулярные къ основанію циклоиды, падаютъ на ея вогнутую сторону. Найти огибающую отраженныхъ лучей.

114. Параллельные лучи падаютъ на вогнутое сферическое зеркало. Найти огибающую отраженныхъ лучей.

115. Лучи, исходящіе изъ свѣтящейся точки, падаютъ на прозрачную пластинку, ограниченную плоскостью. Найти огибающую тѣхъ преломленныхъ лучей, которые лежатъ въ одной плоскости съ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ свѣтящейся точки на поверхность пластинки.

116. Найти огибающую хордъ, общихъ параболѣ и ея кругамъ кривизны.

117. Найти огибающую хордъ, общихъ циссоидѣ $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ и ея кругамъ кривизны.

118. Какое соотношеніе должно существовать между параметрами a и b прямой линіи $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, чтобы оберткой ея различныхъ положеній служилъ кругъ $x^2 + y^2 = r^2$.

119. Найти огибающую эллипсовъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при условіи $a^2 + b^2 = const = c^2$.

120. Перемѣнныя z и t связаны уравненіемъ $\left(\frac{z}{a}\right)^m + \left(\frac{t}{b}\right)^m = 1$. Найти огибающую кривыхъ $\left(\frac{x}{z}\right)^n + \left(\frac{y}{t}\right)^n = 1$.

Построеніе кривыхъ.

Опредѣленіе направленія вогнутости кривой въ данной точкѣ, вершинъ и точекъ перегиба.

121. Опредѣлить выпукла или вогнута относительно оси OX парабола $y^2 = 8x$ въ точкѣ съ абциссою $x = 2$.

122. Опредѣлить направленіе вогнутости кривой $x(x^2 - y^2) + y^2 = 0$ въ точкахъ съ абциссою $x = \frac{3}{2}$.

123. Опредѣлить направленіе вогнутости кривой $x^4 - (x^2 - y^2)\,y$ въ точкахъ съ отрицательными ординатами.

124. Опредѣлить выпуклость или вогнутость кривой $\rho = \frac{1}{\cos^3\varphi}$ при $\varphi \lessgtr \pm\frac{\pi}{6}$.

128. Найти вершины кривой $y = \sin\frac{1}{x}$.

Найти точки перегиба кривой

126. $y = x^4 - 6x^2$.

127. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

128. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$.

129. $x^3 + y^3 = x^2$.

130. $(a^4 + x^2)\,y = ax^3$.

131. Найти точки перегиба и вершины кривой $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

Найти точки перегиба кривой:

132. $y = x^5 + 1$.

133. $y = x^{\frac{8}{3}} - 4x^{\frac{5}{3}} + 3x - 1$.

134. $\rho\cos^3\varphi = 1$.

135. $y = e^{\frac{1}{1-x}}$.

Изслѣдованіе особенныхъ точекъ.

Изслѣдовать особенную точку кривой

136. $y^2 = ax^2 + bx^3$.

137. $\left(y + \frac{2a^2}{x}\right)^2 = x(x^3 - a^3)$.

138. $x^6 + 2a^2x^3y - b^3y^3 = 0$.

139. $2y^2x = y^4 - x(y - x)^2$.

140. $x^5 - ay^4 + 2bx^3y + b^2xy^2 = 0$.

141. $(y - x^2)^2 = x(x - a)^3$.

142. $x^3 - ax^2y + ay^3 + \frac{1}{4}a^2y^2 = 0$.

143. $y = x(1 + x)^2$.

144. $\left(x - \frac{y}{a}\right)^2 = x - b \quad (a < b)$.

145. $y^2 = bx - ax^3$.

146. $ay^2 = x^5 - bx^3$.

147. $y = x\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}$.

148. $y = \frac{x^2}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

149. $y = x\lg x$.

150. $y\lg x = 1$.

151. $y = \frac{1}{1 + e^x}$.

Изслѣдованіе безконечныхъ вѣтвей.

152. Доказать, что парабола не имѣетъ ассимптотъ.

153. Изслѣдовать ассимптоты кривой $y^3 = x^3 - x^2 + y^2$.

154. Изслѣдовать расположеніе вѣтвей кривой $x^3 - y^3 + (y + x)^2 = 0$ у концовъ ея ассимптоты.

155. Изслѣдовать ассимптоты кривой $(y + x)(y^2 - xy + x^2) + 2y - x = 0$.

156. Изслѣдовать расположеніе вѣтвей кривой $y^3 = ax^2 + x$ у концовъ ея ассимптоты.

157. Изслѣдовать безконечныя вѣтви кривой $y^2 = \frac{x^3 - a^3}{x + b}$.

Изслѣдовать ассимптоты кривой

158. $y = \frac{x^3 + ax^2}{x - a}$.

159. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2}$.

159. $x^2y^2 - 1(x^2 + y^2) + 10xy$.

Замкнутыя кривыя.

Построить кривую:

161. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 + 4y^2$.

162. $x^4 + x^2y^2 - 6x^2 + y^2 = 0$.

163. $x^4 - 6x^2y + 25y^2 - 16x^3 = 0$.

164. $x^3 + y^4 - 2xy = 0$.

165. $(x^2 + y^2 - 6x)^2 = x^2 + y^2$.

166. $(x^2 + y^2 - 4x)^2 = 16(x^2 + y^2)$.

167. $y^2 - x^4 + c^4 = 0$.

168. $x^4 + c^2y^2 - 18x^2y + 9y^2 = 0$.

169. $x^4 + y^4 - 3x^3 - 4x^2 = 0$.

170. $y^4 - 2xy^2 - 3x^2 + x^4 = 0$.

171. $x^4 + y^4 = 8xy$.

172. $y^4 + x^4 - 6y^3 + 8x^2y = 0$.

173. $(x^2 + y^2)^3 = 27x^2y^2$.

174. $x^4 + y^4 - 8x^4 - 10y^2 + 16 = 0$.

175. $16(y^4 - 2y^3 - 2y^2) + (x - 1)^2 = 0$.

176. $(x^2 + y^2 - a^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

Кривыя съ параболическими вѣтвями.

Построить кривую:

177. $y^2 - x^2 + 2x^2 - x = 0$.

178. $x^5 + 5ax^4 - a^3y^2 = 0$.

179. $8y^3 - 8x^2y - x^4 = 0$.

180. $2y^3 - 15x^2y + x^5 = 0$.

181. $x^5 + 18x^3y - y^3 = 0$.

182. $y^5 + 3x^4 - 16xy^2 = 0.$ **183.** $x^4 + 2y^2 - 4x^2y$

184. $y^4 - 2x^2y^2 + x^4 + 96xy^2 - 240x^3 = 0.$ **185.** $x^4 - 2xy^2 + y^4 - 64xy^2 + 32x^3 = 0.$

186. $x^3 - 2a^2x^2 - 4ay^3 + a^4 = 0.$

Кривыя съ гиперболическими вѣтвями.

Построить кривую

187. $y^3 - x^3 + y - 2x = 0.$

188. $(2x + y)^2(x + y) - x = 0.$ **189.** $(x^2 - y^2)^2 = 2x - 0.$

190. $x^2 - y^2)(x - y) + 1 = 0.$ **191.** $x^2(x - y)^2 + y = 0.$

192. $x^2y^2 + x - 2y = 0.$ **193.** $x^2y + y - x = 0.$

194. $y^4 - x^4 - 3x^2y - 2x = 0.$ **195.** $xy(x - y + x + y = 0.$

196. $x^2y^2 + y - 1 = 0.$ **197.** $y^2(x + 5) - x^2 = 64.$

198. $x^3y - 2x^2y^2 + xy^2 - 12 = 0.$ **199.** $xy(x^2 - y^2) + 1 = 0.$

200. $y^2 = \frac{x^4}{2a - x}.$ **201.** $x^3 + y^3 - 3x = 0.$

202. $x(x^2 + y^2) = a(x^3 - y^3).$ **203.** $2x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0.$

204. $x^2y^2 + y^4 = 4x^3.$ **205.** $(x^2 - y^2)^2 + 4xy = 0.$

206. $x^4 - y^4 + xy = 0.$ **207.** $x^4 - y^4 + x^2 - 4y^2 = 0.$

208. $x^2(x^2 + y^2) = 4(y - x)^2.$ **209.** $x^2y^2 = (y + 1)^2(8 - y^2).$

210. $x^4 = 4x^2 - 2y^2(x - 1).$ **211.** $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}.$

212. $y^2(x - 1) = x^3.$ **213.** $y^4 - x^4 - 24y^2 + 25x^2 = 0.$

214. $x^2(y - 2)^2 + 2xy - y^2 = 0.$ **215.** $xy(x + y) + x^2 - 4y^2 = 0.$

216. $(x + 1)(x + 2) = \frac{x^3}{y^3}.$ **217.** $x^4 - y^4 = 4x^2y.$

218. $2y^5 - 5xy^2 + x^5 = 0.$ **219.** $(x^3 - y^3)^2 = 2(x^3 + y^3) + 1 = 0.$

Кривыя съ различными безконечными вѣтвями.

Построить кривую. **220.** $xy^2 = x^3 - 3x + 2y - 3 = 0.$

221. $x^3 - 3x^2y - y^2 = 0.$ **222.** $x^4 + 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0.$

223. $x^4 - 4x^2y^2 + y^3 = 0.$

Кривыя, заданныя параметрически.

Построить кривую: **224.** $y^2 = a^2 \sin\frac{y}{x}.$ **225.** $y^2 = a^2 \cos\frac{y}{x}.$

226. $x = \frac{2 + t^2}{1 + t^2},\ y = \frac{t + t}{1 + t^2}.$ **227.** $y = \frac{t - 1}{t^2 - 1},\ y = \frac{t + 1}{(t - 1)^2}.$

228. $x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1},\ y = \frac{t}{t^4 + 1}.$ **229.** $x = \frac{1}{t^2},\ y = \frac{1 - t^2}{t(1 - 2t^2)}.$

230. $x = \frac{t^2}{t^2 - 1},\ y = \frac{t^2 + 1}{t + 2}.$ **231.** $x = \frac{t^2 - 3}{t^2 + 1},\ y = \frac{t(t^2 - 3)}{t^2 + 1}.$

232. $x = \frac{2t - 1}{t^4(t - 1)},\ y = \frac{2t - 1}{t^2(t - 1)}.$ **233.** $x = \frac{t}{1 + t^2},\ y = \frac{t^3}{1 + t^2}.$

234. $x = \frac{(t + 2)^2}{t + 1},\ y = \frac{(t - 2)^2}{t - 1}.$ **235.** $x = \frac{t^2}{t - 1},\ y = \frac{t}{t^2 - 1}.$

Построеніе кривыхъ, заданныхъ геометрическими условіями ихъ образованія

236. Найти геометрическое мѣсто проекцій вершины параболы на ея касательныя. (Цессонда).

237. Найти геометрическое мѣсто точекъ касанія касательныхъ, проведенныхъ изъ нѣкоторой точки данной прямой къ кругамъ постояннаго радіуса R, имѣющимъ центры на той-же прямой

238. Данъ прямой уголъ XOY и на сторонѣ его OX точка A. Чрезъ A проводятся линіи, встрѣчающія OY въ точкѣ D. По лучу AD отъ точки D въ обѣ стороны откладываются длины $DM = DM' = OD$. Найти линію, описываемую точками M и M', $OA = a$. Прямая строфонда)

239. Данъ кругъ радіуса R съ центромъ въ точкѣ O и два перпендикулярныхъ діаметра OA и OB. Изъ точки A проводится произвольный лучъ, встрѣчающій OB въ точкѣ M. Изъ M проводится прямая параллельно AO, встрѣчающая кругъ въ точкѣ N. Наконецъ изъ N проводится прямая параллельно OB и замѣчается точка пересѣченія ея P съ лучемъ AM. Найти геометрическое мѣсто точки P.

240. Данъ отрѣзокъ $OO' = d$. Изъ точки O проводится произвольный лучъ, и на него изъ точки O' опускается перпендикуляръ $O'M$. Берется точка M' симметричная съ M по отношенію къ прямой OO' и изъ нея опускается на OM перпендикуляръ. Найти линію, описываемую основаніемъ этого перпендикуляра

241. Даны касающіеся равные круги C и C'. На C' берется произвольная

точка M и опредѣляется полара ея по отношенію къ кругу C. Пусть будетъ P точка пересѣченія ея съ прямою, проведенною изъ M' параллельно линіи центровъ данныхъ круговъ. Найти геометрическое мѣсто точки P. (Biorne, Miss Angas Scott).

242. Найти геометрическое мѣсто вершины прямого угла въ прямоугольномъ треугольникѣ съ катетами R и $2R$, гипотенуза котораго однимъ концомъ скользитъ по діаметру круга радіуса R, а другимъ по окружности того же круга.

243. Найти геометрическое мѣсто серединъ хордъ нормальныхъ къ эллипсу въ одномъ изъ концовъ.

244. Найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра эллипса на хорды общія эллипсу и его соприкасающемуся кругу.

245. Прямая данной длины l скользитъ концами по двумъ перпендикулярнымъ прямымъ. Найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ на перемѣнную прямую изъ точки встрѣчи двухъ данныхъ. (Четырехлепестникъ).

246. Найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра эллипса на нормали.

247. Дана гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и двѣ прямыя $y = +b$, $y = -b$. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія діагоналей трапеціи, образованной осью OY, касательной къ гиперболѣ и данными прямыми.

248. Найти геометрическое мѣсто центровъ данной равнобочной гиперболы, которая проходитъ черезъ двѣ данныя точки. Полуось гиперболы a, разстояніе между данными точками $= 2c$.

249. Найти геометрическое мѣсто ортоцентровъ треугольниковъ, образованныхъ двумя радіусами векторами и осью симметріи 1) эллипса, 2) гиперболы.

250. Данъ кругъ съ центромъ въ O радіуса R и точка A на его плоскости ($OA = a$). Проводится произвольный радіусъ OM и опредѣляется точка пересѣченія P этого радіуса съ линіей AP перпендикулярной къ AM. Найти геометрическое мѣсто точекъ P.

Кривыя двоякой кривизны

Касательная прямая и нормальная плоскость.

Провести касательную къ кривой

251. $y^2 + z^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 10$ въ точкѣ (1, 3, 4).

252. $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47$, $x^2 + 2y^2 = z$ въ точкѣ (−2, 1, 6).

253. $y^2 = 2px$, $z^2 = 2qx$ въ точкѣ съ абсциссою $x = p + q$ и найти ея длину отъ точки касанія до пересѣченія съ плоскостью $x = 0$.

254. Найти уравненіе касательной къ кривой $x^2 + y^2 = z$, $x = y$ въ точкѣ (x_0, y_0, z_0).

Найти уравненіе касательной къ кривой и косинусы угловъ, составляемыхъ ею съ осями координатъ.

255. $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$. **256.** $x = a \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \sin \frac{t}{2}$.

257. Найти уравненіе касательной къ кривой $x = \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^3}{3}$, $z = \frac{t^2}{2}$. Въ какихъ точкахъ касательная къ этой кривой будетъ параллельна плоскости $x + 3y + 2z = 0$?

258. Найти уравненіе касательной къ кривой $x = t \cos t + \sin t$, $y = t \sin t + \cos t$, $z = t + 1$ и тѣ точки на этой кривой, въ которыхъ касательная параллельна плоскости YOZ или XOZ.

259. Вычислить длину дуги кривой $x^2 + 3y^2 = 2xy = 9z$ въ предѣлахъ измѣненія x отъ 0 до 3. Доказать, что касательная къ этой кривой образуетъ постоянный уголъ съ нѣкоторымъ опредѣленнымъ направленіемъ.

260. Доказать, что кривая $x = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos t$, $y = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin t$, $z = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}$ пересѣкаетъ образующія конуса $x^2 + y^2 = z^2$ подъ угломъ $45°$.

261. Доказать, что линіи пересѣченія цилиндровъ $y^2 + z^2 = k^2$ съ поверхностью $xy = az$ пересѣкаютъ всѣ образующія этой поверхности, принадлежащія къ одной системѣ, подъ прямымъ угломъ.

262. Изъ нѣкоторой точки на оси прямого кругового цилиндра опускаются перпендикуляры на касательныя ко всѣмъ винтовымъ линіямъ одинаковаго шага,

которыя могутъ быть помѣщены на поверхности цилиндра. Найти геометрическое мѣсто основаній этихъ перпендикуляровъ.

263. Изъ точекъ винтовой линіи проводятся прямыя параллельныя одной изъ касательныхъ къ винтовой линіи. Найти геометрическое мѣсто слѣдовъ этихъ прямыхъ на основаніи цилиндра, на которомъ находится упомянутая винтовая линія.

264. Доказать, что кривая пересѣченія сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ съ поверхностью $\log tg \frac{\arccos z}{2} + \cot\alpha \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = c$ встрѣчаетъ меридіаны сферы, опредѣляемые плоскостями $y = x\,tg\,\alpha$ подъ постояннымъ угломъ. (Бѣлянкинъ)

265. Найти уравненіе нормальной плоскости кривой $z = x - y^2$, $y = x$.

266. Найти уравненіе нормальной плоскости къ кривой $y^2 = 2px$, $x^2 + z^2 = a$ въ точкѣ съ абсциссою $x = \frac{p}{2}$.

267. Доказать, что нормальныя плоскости къ кривой $x = a\cos\varphi + \varphi\, a\sin\alpha \sin\varphi$, $y = a\sin\varphi - \varphi\, a\cos\alpha \sin\varphi$, $z = a\cos\alpha \sin\varphi$, гдѣ φ — перемѣнный параметръ, всѣ проходятъ черезъ прямую $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 0$, $z = 0$.

Соприкасающаяся плоскость

Найти уравненіе соприкасающейся плоскости кривой:

268. $y^2 = x$, $x^2 = z$ въ точкѣ (1, 1, 1).

269. $y = \varphi(x)$, $z = x\varphi'(x) + b$.

270. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$.

271. $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$.

272. Доказать, что соприкасающаяся плоскость линіи $x = \sqrt{\varphi(t)}$, $y = t\sqrt{\varphi(t)}$, $z = \varphi(t)$, расположенной на коноидальной поверхности $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, совпадаетъ съ касательной плоскостью къ этой послѣдней.

Нормаль и бинормаль.

Найти уравненія главной нормали и бинормали къ кривой:

273. $x = \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^3}{3}$, $z = \frac{t^2}{2}$.

274. $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$.

275. $y^2 = x$, $x^2 = z$ въ точкѣ (1, 1, 1).

276. Кривая $x = R\,ch\,\theta\cos\theta$, $y = R\,ch\,\theta\sin\theta$, $z = R\theta$ лежитъ на поверхности вращенія $x^2 + y^2 = R^2 ch^2 \frac{z}{R}$, называемой катеноидомъ. Доказать, что во всякой точкѣ бинормаль къ этой кривой, будетъ нормалью къ поверхности.

277. Доказать, что кривая, упомянутая въ задачѣ № 276, пересѣкаетъ всѣ образующія катеноида (т. е. сѣченія его плоскостями перпендикулярными къ оси вращенія) подъ угломъ 45°.

278. По главнымъ нормалямъ винтовой линіи откладываются отрѣзки данной длины. Найти геометрическое мѣсто ихъ концовъ.

279. Доказать, что одна изъ биссектрисъ угловъ, составляемыхъ касательною и бинормалью къ кривой, $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, имѣетъ постоянное направленіе.

1-ая и 2-ая кривизна.

280. Найдя координаты центра кривизны простой винтовой линіи $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = kt$, опредѣлить условіе, чтобы геометрическое мѣсто этихъ центровъ лежало бы на томъ же цилиндрѣ, на которомъ расположена винтовая линія.

281. Найти радіусъ первой кривизны кривой опредѣляемой пересѣченіемъ поверхностей $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y^2 = 2x + z = 0$, въ точкѣ (1, 1, 1).

Опредѣлить радіусъ 1-ой кривизны кривой **282.** $x = ma$, $y^2 = 2bz$.

283. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\sin\frac{t}{2}$.

284. $x = R\,ch\,t\cos t$, $y = R\,ch\,t\sin t$; $z = Rt$.

285. Вычислить радіусъ 2-ой кривизны кривой $y^2 = x$, $x^2 = z$.

286. Опредѣлить радіусъ 2-ой кривизны для кривой $x = R\,ch\,t\cos t$; $y = R\,ch\,t\sin t$, $z = Rt$. Доказать, что бинормаль къ этой кривой встрѣчаетъ ось OZ, и что отрѣзокъ ея между точкой кривой, изъ которой она исходитъ, и точкой пересѣченія ея съ осью OZ, равенъ радіусу 2-ой кривизны.

Опредѣлить радіусы 1-ой и 2-ой кривизны кривой: **207.** $y = \frac{x^2}{2a}$, $z = \frac{x^3}{6a^2}$

288. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$. **289.** $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $z = e^t$

239. $x = a\frac{\cos\vartheta}{ch\,\vartheta}$; $y = a\frac{\sin\vartheta}{ch\,\vartheta}$, $z = a(\vartheta - th\,\vartheta)$

Поверхности

Касательная плоскость и нормаль.

291. Найти плоскость, касательную къ поверхности $x^3 + x^2y = a^2z$ въ точкѣ $(a, 3a, 2a)$.

Провести плоскость касательную къ поверхности. **292.** $xy^2 + z^3 = 12$ въ точкѣ $(1, 2, 2)$.

293. $x^m + y^m + z^m = a^m$. **294.** $x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + z^2)$.

295. Къ поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x - y + 2z = 0$.

296. Составить уравненіе касательной плоскости и нормали къ поверхности винтового геликоида $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = hu$.

297. Найти уравненіе касательной плоскости къ поверхности $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$.

298. Найти линію пересѣченія однополаго гиперболоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ съ касательною плоскостью, проведенною въ точкѣ (A, B, C).

299. Найти линіи, по которымъ поверхность $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ пересѣкается съ касательною плоскостью проведенною черезъ точку (A, B, C) на поверхности.

300. Найти линіи, по которымъ поверхность $xy = az$ пересѣкается съ касательною плоскостью, проведенною черезъ точку (A, B, C) на поверхности.

301. Доказать, что касательныя плоскости къ поверхности $xyz = a^3$ образуютъ съ плоскостями координатъ тетраэдръ постояннаго объема.

302. Доказать, что касательныя плоскости къ поверхности $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ образуютъ на осяхъ координатъ отрѣзки, сумма которыхъ постоянна.

303. Доказать, что всѣ плоскости, касательныя къ поверхности $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, проходятъ черезъ одну и ту же точку.

304. Провести къ эллипсоиду касательную плоскость, отсѣкающую на осяхъ координатъ равные отрѣзки.

305. Доказать, что ордината той точки, гдѣ плоскость касательная къ поверхности $x^m = (z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^m f\left(\frac{y}{x}\right)$ пересѣкаетъ ось ZZ, пропорціональна разстоянію точки касанія отъ начала координатъ.

306. Найти поверхность, на которой лежатъ касательныя къ винтовой линіи $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = ka\varphi$, и доказать, что касательная плоскость къ этой поверхности составляетъ съ осью OZ постоянный уголъ.

307. Линія $x = a\,tg\,t$, $y = b\cos t$, $z = -b\sin t$, расположенная на поверхности параболоида пересѣкаетъ всѣ образующія одной системы подъ прямымъ угломъ.

308. Доказать, что поверхности $xy = \alpha z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = \beta$, $x^2 + 2x^2 = (z^2 + 2y^2)$ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

309. Доказать, что поверхности $x^2 = \alpha$ и $2z = x^2 + y^2 + \Phi(x^2 - y^2)$, пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

310. Доказать, что поверхности $xy = \alpha$, $\sqrt{y^2 + x^2} + \sqrt{z^2 + y^2} = a$, $\sqrt{z^2 + x^2} + \sqrt{z^2 + y^2} = \alpha_2$, пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

311. Доказать, что поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha x$, $x^2 + y^2 + z^2 = \beta y$, $x^2 + y^2 + z^2 = \gamma z$, пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

312. Доказать, что для поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = z\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$ длина отрѣзка нормали между поверхностью и плоскостью XOY равна разстоянію начала координатъ отъ слѣда нормали на плоскости XOY.

313. Найти общее уравненіе сферъ пересѣкающихъ подъ прямымъ угломъ поверхность $x^2 + y^2 + z^2 + a(x^2 + y^2 - z^2) = 0$.

314. Найти геометрическое мѣсто проекцій начала координатъ на касательныя плоскости къ поверхности $xyz = a^3$

315. Найти геометрическое мѣсто проекцій центра эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ на касательныя плоскости.

316. Доказать, что проекція отрѣзка нормали къ поверхности $z^2 - 2l^2\sqrt{x^2 + y^2 + m^2}$ между поверхностью и плоскостью XOY на эту плоскость постоянна.

317. Поверхность задана параметрически уравненіями: $x = v\cos u - \varphi(u)\cos u + \varphi'(u)\sin u$, $y = v\sin u - \varphi(u)\sin u - \varphi'(u)\cos u$, $z = \sqrt{2v}$. Доказать, что проекція отрѣзка нормали къ этой поверхности между поверхностью и плоскостью XOY на эту плоскость постоянна.

318. Если изъ какой-нибудь точки M на поверхности $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\vartheta$, $z^2 = \rho^2 + \Phi(\rho^2)$, провести нормаль MN до пересѣченія въ точкѣ N съ плоскостью XOY и опустить на ту же плоскость перпендикуляръ MP, то уголъ PON (гдѣ O — начало координатъ) будетъ постоянно равенъ 45°.

319. Если изъ какой-нибудь точки M на поверхности $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\vartheta$, $z^2 = c^2\vartheta + \Phi(\rho^2)$ провести нормаль MN до пересѣченія въ точкѣ N съ плоскостью XOY и опустить на ту же плоскость перпендикуляръ MP, то площадь треугольника PON (гдѣ O — начало координатъ) будетъ постоянно равна $\frac{c^2}{4}$.

320. Изъ точекъ прямой $y = x$, $z = \frac{\pi}{4}$, лежащей на поверхности $y = x\,tg\,z$, проводятся нормали къ поверхности. Найти общее мѣсто этихъ нормалей.

321. Найти общее мѣсто нормалей къ поверхности $b^2y^2 = x^2(a^2 - z^2)$, имѣющихъ основанія на прямой $z = h$, $by = x\sqrt{a^2 - h^2}$, лежащей на поверхности.

Поверхности цилиндрическія, коническія и поверхности вращенія.

322. Найти уравненіе цилиндрической поверхности, направляющей которой служитъ кривая, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2Ry$, а образующія параллельны направленію $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = z$.

323. Найти уравненіе цилиндра съ образующими параллельными прямой $x = y = z$, описаннаго около эллипсоида $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

324. Найти уравненіе конической поверхности, имѣющей вершину въ точкѣ $(-1, 0, 0)$ и касающейся параболоида $y^2 + \frac{z^2}{2} = 2x$.

325. Найти уравненіе конической поверхности, имѣющей вершину въ точкѣ (a, b, c), а направляющей параболу $z = 0$, $y^2 = 2px$.

326. Найти уравненіе конической поверхности, имѣющей вершину въ точкѣ $(0, 0, c)$, а направляющей — лемнискату $z = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = r^2(x^2 - y^2)$.

327. Найти уравненіе конуса съ вершиной въ точкѣ $(0, 0, 3c)$, описаннаго около поверхности $xyz = c^3$.

328. Найти уравненіе поверхности получаемой отъ вращенія параболы $y^2 = 2px$ около касательной въ вершинѣ.

329. Найти уравненіе поверхности отъ вращенія круга $(x - a)^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ около осей OX и OY.

330. Найти уравненія поверхностей вращенія лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ около осей OX и OY.

331. Около параболоида $x^2 + y^2 = 2z$ описать коническую поверхность, имѣющую вершину въ точкѣ $(0, 0, 2)$.

332. Найти уравненіе цилиндра съ образующими параллельными (l, m, n), описаннаго около шара $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

333. Поверхность, происходящая отъ вращенія кривой $x = \sin z$, $y = 0$ около оси OZ освѣщается параллельными лучами, составляющими съ осью OZ уголъ 45°. Найти форму границы тѣни, бросаемой поверхностью на плоскость XOY.

Огибающія поверхности.

334. Найти огибающую плоскостей, отсѣкающихъ отъ даннаго трехграннаго угла тетраэдръ постояннаго объема.

335. Найти обертку сферъ, имѣющихъ свои большіе круги на параболоидѣ $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$.

336. Найти обертку шаровъ $(x - lt)^2 + (y - mt)^2 + (z - nt)^2 = r^2$, гдѣ t — произвольный параметръ.

337. Найти поверхность, огибающую перемѣнныя положенія шара даннаго радіуса R, центръ котораго движется по окружности $x^2 + z^2 = r^2$.

338. Найти обертку плоскостей, проходящихъ черезъ заданную точку и находящихся на одинаковомъ разстояніи отъ другой заданной точки.

339. Найти огибающую сферъ имѣющихъ центры на эллипсѣ и проходящихъ черезъ центръ эллипса.

340. Двѣ параболы, расположенныя въ перпендикулярныхъ плоскостяхъ имѣютъ общую вершину и общую касательную въ вершинѣ. Найти огибающую плоскостей, касающихся парабол.

341. Найти огибающую плоскостей, отсѣкающихъ отъ даннаго прямого кругового конуса постоянный объемъ.

342. Найти огибающую плоскостей, образующихъ на осяхъ координатъ отрѣзки α, β, γ, связанные соотношеніемъ $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n = c^n$.

Кривизна поверхностей.

343. Найти главные радіусы кривизны въ данной точкѣ геликоида $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = kv$.

344. Найти геометрическое мѣсто главныхъ центровъ кривизны поверхности $xy = az$ для точекъ оси OX.

345. Найти главные радіусы кривизны въ какой-либо точкѣ поверхности $xy = az$.

346. Найти главные радіусы кривизны поверхности $e^z = \frac{\cos y}{\cos x}$.

347. Найти главные радіусы кривизны поверхности $\sin z = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.

348. Черезъ вершину параболоида вращенія $y^2 + z^2 = 2px$ проводятся на его поверхности кривыя. Найти геометрическое мѣсто ихъ центровъ кривизны.

349. Найти точки закругленія эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$.

350. Если черезъ точку поверхности провести n нормальныхъ сѣченій, образующихъ между собою равные углы, то средняя ариѳметическая кривизнъ этихъ сѣченій не зависитъ отъ числа n и отъ положенія перваго сѣченія.

ОТДѢЛЪ VI

Высшая алгебра.

Вычисленіе опредѣлителей.

Вычислить значенія опредѣлителей 1. $\Delta = \begin{vmatrix} 8, & 4, & 2, & 2 \\ 4, & 3, & 1 & 1 \\ 2, & 1 & 2, & 1 \\ 1, & 0, & 2 & 1 \end{vmatrix}$

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 5, & 0, & 4, & 2 \\ 1, & 1, & 2, & 1 \\ 4 & 1, & 2, & 0 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$ 3. $\Delta = \begin{vmatrix} 2, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \\ 1, & 8, & 3 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1 + a, & 1 \\ 1, & 1, & 1 + b \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1, & c, & -b \\ c, & 1 & a \\ b, & a, & 1 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} x, & y, & x + y \\ y, & x + y, & x \\ x + y, & x, & y \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 + a & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1 + b, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1 + c, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 + d \end{vmatrix}$. 8. $\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ x & y, & z \\ x^2, & y^2, & z^2, \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1, & 1, & \cdot & 1 \\ x_1, & x_2, & & x_n \\ x_1^2, & x_2^2, & \cdot & x_n^2 \\ \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ *Указаніе.* Воспользоваться теоремой о разложеніи функціи степени $n - 1$ на множители

10. Выяснивъ свойства функціи $f(x)$, заданной ур-ніемъ

$$\begin{vmatrix} f(x), & 1, & x, & x^2, & \cdot & x^m \\ b_0, & 1 & x_0, & x_0^2, & & x_0^m \\ b_1, & 1, & x_1, & x_1^2, & \cdot & x_1^m \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ b_m, & 1 & x_m, & x_m^2, & & x_m^m \end{vmatrix} = 0$$

найти ее.

11. Вычислить опредѣлители $\begin{vmatrix} \cos(a - b), & \cos(b - c), & \cos(c - a) \\ \cos(a + b), & \cos(b + c), & \cos(c + a) \\ \sin(a + b), & \sin(b + c), & \sin(c + a) \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} \sin a, & \cos a, & \sin 2a \\ \sin b, & \cos b, & \sin 2b \\ \sin c, & \cos c, & \sin 2c \end{vmatrix}$

Рѣшить системы уравненій.

13. $2x - y + 5z - 2t = 4, \quad x + 2y - 2z + t = 2.$
$x + 2y - z - 3t = -1, \quad x + y - z - t = 0.$

14. $x - 2y + z - t = -1, \quad x + 2y + 2z - 2t = 3,$
$x + y - z - t = 0, \quad 3x + y + 2z - 4t = 2.$

15. $x + 2y - z - 2t = 0, \quad x + 2y - 2z - t = 0,$
$2x - y + 2z - 3t = 0, \quad x - y + 2z - 2t = 0.$

16. $x + 2y - z - 2t = 0, \quad 4x + 3y - 7t = 0,$
$2x + y + 2z - 3t = 0, \quad 3x - 4y + 5z - 4t = 0.$

Теорія комплексныхъ чиселъ.

17. Пусть z и z_1 два комплексныхъ числа. Доказать, что $mod\, z + mod\, z_1 \geq mod \left[\frac{z + z_1}{2} + \sqrt{zz_1}\right] + mod \left[\frac{z + z_1}{2} - \sqrt{zz_1}\right]$

18. Найти кубическіе корни изъ i

19. Найти корни 5-ой степени изъ i

Доказать равенства 20. $x + y(\cos\theta + i\sin\theta) = [x' + y'(\cos\theta' + i\sin\theta')](\cos\alpha + i\sin\alpha)$, если $x' = \frac{x\sin(\theta - \alpha) + y\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta}$, $y' = \frac{x\sin\alpha + y\sin\alpha}{\sin\theta}$ и $\theta' = \theta - \alpha$.

21. $|x + y| + |x - y| = |x + \sqrt{x^2 - y^2}| + |x - \sqrt{x^2 - y^2}|$

22. $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2\{|x|^2 + |y|^2\}$

23. Выразить $\cos 6\varphi$ черезъ степени $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$

24. » $\sin 5\varphi$ » » » » » » »

25. » $\cos 4\varphi$ » » » » » » »

26 » $\cos\varphi$ » тригонометрическія функціи кратныхъ дуги φ.

27 » $\cos\varphi$ » » » » » φ.

28. Доказать равенство $\frac{\cos n\varphi}{\cos^n\varphi} = 1 - C_n^2 tg^2\varphi + C_n^4 tg^4\varphi - \ldots + A$, гдѣ $A = (-1)^{\frac{n}{2}} tg^n\varphi$ при n четномъ и $A = (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{n-1} tg^{n-1}\varphi$ при n нечетномъ. (C_n^k — числу сочетаній изъ n эл. по k).

29. Разложить на множители функцію $f(x) = 1 - C_n^2 x^2 + C_n^4 x^4 - \ldots + A$, гдѣ $A = (-1)^{\frac{n}{2}} x^n$ при n четномъ и $A = (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{n-1} x^{n-1}$ при n нечетномъ.

30 Доказать равенство $\frac{\sin n\varphi}{\cos^n\varphi} = C_n^1 tg\varphi - C_n^3 tg^3\varphi + C_n^5 tg^5\varphi - \ldots + A$, гдѣ $A = (-1)^{\frac{n-2}{2}} C_n^{n-1} tg^{n-1}\varphi$ при n четномъ и $A = (-1)^{\frac{n-1}{2}} tg^n\varphi$ при n нечетномъ.

31. Разложить на множители функцію $f(x) = C_n^1 x - C_n^3 x^3 + C_n^5 x^5 - \ldots + A$, гдѣ $A = (-1)^{\frac{n-2}{2}} C_n^{n-1} x^{n-1}$ при n четномъ и $A = (-1)^{\frac{n-1}{2}} x^n$ при n нечетномъ.

Найти 32. $\log(-e)$ 33. $\log i$

34. $\log(1 + i)$. 35. $\log(1 + xi)$

36. 2^i 37. i^i.

38. $tg\frac{\pi}{4} i$ 39. $\sin(x + yi)$, $\cos(x + yi)$.

40 Рѣшить уравненіе $e^x - e^{-x} = 2a$, гдѣ a вещественное число.

41 Прослѣдить какъ измѣняется аргументъ $x(x - 1)$, когда x описываетъ замкнутую кривую въ направленіи обратномъ часовой стрѣлкѣ

42 Прослѣдить какъ измѣняется аргументъ $\sqrt{c}$, $\sqrt{x - 1}$, когда x описываетъ замкнутую кривую около начала координатъ въ направленіи обратномъ часовой стрѣлкѣ.

43. Прослѣдить, какъ измѣняется аргументъ $\sqrt{x(x - 1)}$, когда x описываетъ замкнутую кривую въ направленіи обратномъ часовой стрѣлкѣ (см. зад. № 42).

44. Доказать, что всякой величинѣ, модуль которой единица, можно дать видъ $\frac{x + i}{x - i}$, гдѣ x вещественно

45. Найти мѣсто чиселъ x, гдѣ $x = \frac{at + b}{t - c}$ и модуль t равенъ единицѣ.

46. » » » » » $x = \frac{1}{2}\left(at + \frac{b}{t}\right)$ » » » » »

47. » » » » » $x = \frac{a}{t - 1} + \frac{b}{t + 1} + c$ » » » »

48. Вычислить суммы $x = \cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \ldots + \cos[a + (n - 1)b]$ $y = \sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) + \ldots + \sin[a + (n - 1)b]$. *Указаніе.* Приложить формулы Эйлера.

49. Предполагая, что ряды $1 + a\cos\omega + a^2\cos 2\omega + \ldots + a^n\cos n\omega + \ldots$ и $a\sin\omega + a^2\sin 2\omega + \ldots + a^n\sin n\omega + \ldots$ сходящіеся, найти ихъ суммы.

Разложеніе дробей на простѣйшія.

Разложить на простѣйшія дроби **50.** $\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}$ **51.** $\frac{x^3}{x^2+x+1}$

52. $\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$ **53.** $\frac{x^5-3x^4+2x^3-x^2+3x-2}{(x-1)^2(x-2)}$

54. $\frac{4(x^2+1)-x^2(x^3+1)}{x^7+4x^5+4x^3}$ **55.** $\frac{x^6-x^3+1}{(x-1)^3}$

56. $\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}$. **57.** $\frac{x^5+2x^4+5x^3+4x^2+3x+1}{x^4+x^3+x^2}$

58. $\frac{2}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$. **59.** $\frac{x^6-2x^3}{(x^2+x+1)^2}$

60. $\frac{x^4+2x^2+2}{(x^2-1)(x^2+1)}$ **61.** $\frac{x^5+4x^4+x^3+x+1}{x^6-2x^3+1}$

62. $\frac{25}{4x^3+20x^2+25x}$ **63.** $\frac{9x^6-x^4-17x^2-3}{x^3(3x^2+1)^2}$

64. $\frac{1}{x^4+4}$ **65.** $\frac{x^2+1}{x^4+2x^2\cos 2\alpha+1}$.

66. $\frac{x^2-1}{x^3-3x+1}$

Уравненія 3-й степени.

Рѣшить ур-нія. **67.** $x^3-9x^2+20x-11=0$. **68.** $x^3+3x^2-4x-1=0$.
69. $x^3+6x^2+6x-7=0$. **70.** $x^3-3x^2-3x+10=0$.
71. $x^3-3x^2-3x+9=0$.
72. Вычислить при помощи логариѳмическихъ таблицъ корни ур-нія $x^3-5x+1=0$.
73. Вычислить средній корень предыдущей задачи съ точностью до 0,00001
74. Вычислить высоту шарового сегмента, объемъ котораго равенъ $\frac{1}{4}$ объема шара. Радусъ шара 1 метръ
75. Рѣшить ур-ніе $x^4+x^3+6x^2+8x+2=0$.

Нахожденіе раціональныхъ и кратныхъ корней.

Найти раціональные корни уравненія **76.** $6x^2-11x^4+9x^3-17x^2+14x-3=0$.
77. $6x^5+11x^4-x^3+5x-6=0$. **78.** $6x^4-11x^3-x^2-4=0$.
79. $x^6+3x^5+4x^4+3x^3-15x^2-16x+20=0$.
80. $x^5-5x^4+2x^3-25x^2+21x+270=0$
81. $4x^4-11x^2+9x-2=0$. **82.** $6x^4-41x^3+85x^2-51x+9=0$.
Найдя раціональные корни, отдѣлить ирраціональные:
83 $2x^4-4x^3+3x^2-5x-2=0$
84. $4x^6+13x^5+16x^4+23x^2-5x^2-45x+18=0$.
85. $2x^3+12x^2+13x+15=0$
86 Рѣшить уравненіе $6x^5+x^4-14x^3+4x^2+5x-2=0$.
Освободясь отъ кратныхъ корней, рѣшить уравненія:
87. $8x^5+4x^4-58x^3-45x^2+108x+108=0$.
88. $8x^5-4x^4-58x^3+45x^2+108x-108=0$.
89. $16x^5-16x^4-72x^3-64x^2-23x-3=0$.
90. $9x^5+96x^4+292x^3+48x^2-576x+256=0$.
91 $9x^5+120x^4+580x^3+1200x^2+960x+256=0$.
Найти кратные корни ур-ній **92.** $f=x^5+2x^4-8x^3-16x^2+16x+32=0$.
93. $f=x^4-4x^3+2x^2+3x-2=0$.
94. $f=x^6+6x^5+3x^4+12x^3+3x^2+6x+1=0$.
95. $f=x^6-15x^4-14x^3+36x^2+24x-32=0$.
96. $f=(x+1)^7-x^7+7x+6=0$.
Освободить отъ кратныхъ корней ур-нія.
97. $x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1=0$.
98. $x^6+2x^5-2x^2-1=0$.

Отдѣленіе и вычисленіе корней.

99. Найдя раціональные корни, отдѣлить ирраціональные: $2x^6 + x^5 - 9x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 7x + 6 = 0$.

Отдѣлить вещественные корни уравненій. **100.** $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 0{,}9 = 0$.
101. $x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 19x^2 - 17x + 1 = 0$. **102.** $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 7x^2 + 39x - 21 = 0$.
103. $2x^5 - x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 11x + 5 = 0$. **104.** $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 18x + 12 = 0$.
105. $3x^5 - 15x^4 - 35x^3 + 165x^2 + 360x - 1080 = 0$

106. Отдѣлить корни ур-нія $x^6 + 5x + 1 = 0$ и вычислить съ точностью до 0,00001.

107. Отдѣлить корни ур-нія $x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 1 = 0$ и вычислить съ точностью до 0,1.

108. Отдѣлить корни ур-нія $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x + 4 = 0$.

109 Вычислить наибольшій корень задачи № 72 съ точностью до 0,0001

Отдѣлить по способу Fourier корни уравненій: **110.** $x^4 - 4x^3 + 3x + 23 = 0$.

111. $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{21} = 0$. **112.** $x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 4 = 0$.

113. $x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 1 = 0$. **114.** $x^5 + x^4 + x^2 - 2ax - 36 = 0$.

115 $x^4 - 3x^4 + 2x^3 - x + 1 = 0$. **116.** $x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 2x - 2 = 0$.

117. $x^5 - 3x^4 - 24x^3 + 95x^2 - 46x - 101 = 0$. **118.** $x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$.

Отдѣлить по способу Sturm'a корни уравненій **119.** $x^4 - 6x^3 + x^2 - 1 = 0$.

120. $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4 = 0$ **121** $(x + a)^7 + (x - a)^7 = 0$.

122 Вычислить корни ур-нія $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$ съ точностью до 0,01.

123. » » » $x^3 - 12x^2 + 3 = 0$ » » » 0,01

124. Рѣшить уравненіе $\left(\frac{1 + ax}{1 - ax}\right)^n = \frac{1 + ax}{1 - ax}$.

125. Вычислить съ точностью до $\frac{1}{1000}$ корень ур-нія $\sin x + x = 1$

126. Опредѣлить число вещественныхъ корней ур-нія $3^x - 3x = 0$

127 Вычислить съ точностью до 0,001 корень уравненія $x = 1 + \frac{1}{10}\sin x$.

120. Вычислить съ точностью до 0,0001 корень ур-нія $x = \frac{1}{10}e^{-x}$.

129. Вычислить съ точностью до 0,01 корень ур-нія $e^{x} = x$

130 Найти три значущихъ цифры корней ур-нія $x^2 - 10\log x - 3 = 0$.

Задачи разнаго характера.

Доказать тождества: **131.** $x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$.

132. $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

133. $x^{2n+1} - 1 = (x - 1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right)$

134. $\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$

135. $x^{2n+1} + 1 = (x + 1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 + 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right)$.

136. $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$

137. $\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}$ при n нечетномъ.

138. $\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{4\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{2n\pi}{2n+1} = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^n}$ при n нечетномъ.

139. $\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{4\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2^n}$ при n четномъ

140. $x^{2n}+1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+1\right)$.

141. $\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{3\pi}{4n}\cdots\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\frac{\sqrt{2}}{2^n}$

142. $\cos\frac{\pi}{4n}\cos\frac{3\pi}{4n}\cdots\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\frac{\sqrt{2}}{2^n}$

143. $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}=\frac{1}{2^n}$

144. $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}$ при n четномъ

145. $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}$ при n четномъ.

146. Изъ зависимости, связывающей $tg\,a$ и $tg\frac{a}{m}$, вывести тождество

$tg\frac{a}{m}\cdot tg\frac{\pi+a}{m}\cdot tg\frac{2\pi+a}{m}\cdots tg\frac{(m-1)\pi+a}{m}=(-1)^{\frac{m-1}{2}}tg\,a$ при m нечетномъ.

147. Изъ зависимости, связывающей $tg\,a$ и $tg\frac{a}{m}$, вывести тождество

$tg\frac{a}{m}+tg\frac{a+\pi}{m}+\cdots+tg\frac{(m-1)\pi+a}{m}=m\,tg\,a$ при m нечетномъ.

148. Изъ зависимости, связывающей $tg\,a$ и $tg\frac{a}{m}$, вывести тождество $\frac{1}{\cos^2\frac{a}{m}}+\frac{1}{\cos^2\frac{a+\pi}{m}}+\cdots+\frac{1}{\cos^2\frac{a+(m-1)\pi}{m}}=\frac{m^2}{\sin^2 a}$ при m четномъ

149. Изъ зависимости, связывающей $tg\,a$ и $tg\frac{a}{m}$, вывести тождество

$tg\frac{a}{m}+tg\frac{a+\pi}{m}+\cdots+tg\frac{(m-1)\pi+a}{m}=-m\cot a$ при m четномъ.

150. На основаніи задачи № 149 доказать тождество $\frac{1}{\cos^2\frac{a}{m}}+\frac{1}{\cos^2\frac{a+\pi}{m}}+\cdots+\frac{1}{\cos^2\frac{a+(m-1)\pi}{m}}=-\frac{m^2}{\sin^2 a}$ при m четномъ.

151. Изъ зависимости, связывающей $\cot a$ и $\cot\frac{a}{m}$, вывести тождество $\cot\frac{a}{m}+\cot\frac{a+\pi}{m}+\cdots+\cot\frac{a+(m-1)\pi}{m}=m\cot a$

152. Изъ зависимости, связывающей $\cot a$ и $\cot\frac{a}{m}$, вывести тождество $\frac{1}{\sin^2\frac{a}{m}}+\frac{1}{\sin^2\frac{a+\pi}{m}}+\cdots+\frac{1}{\sin^2\frac{a+(m-1)\pi}{m}}=\frac{m^2}{\sin^2 a}$. Это тождество можно также доказать на основаніи предыдущей задачи.

Доказать тождества.

153. $\sin nz=2^{n-1}\sin z\sin\left(z+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(z+\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\sin\left(z+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

154. $\cos nz=2^{n-1}\sin\left(z+\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(z+\frac{3\pi}{2n}\right)\cdots\sin\left(z+\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)$.

155. Зная остатки отъ дѣленія цѣлой раціональной функціи $f(x)$ на $x-a$, $x-b$ и $x-c$, найти остатокъ отъ дѣленія $f(x)$ на произведеніе $(x-a)(x-b)(x-c)$.

156. Даянъ многочленъ $f(x)=x^3+x^2-2$, имѣющій корни 1, α и β. Найти многочленъ $\varphi(x)$ второй степени, который при $x=1$ обращается въ 1, при $x=\alpha$ принимаетъ значеніе β и при $x=\beta$ принимаетъ значеніе α. Доказать, что $\varphi[\varphi(x)]-x$ дѣлится безъ остатка на $f(x)$.

157. Найти полиномъ $f(x)$ 7-ой степени такъ, чтобы $f(x)+1$ дѣлился на $(x-1)^4$, а $f(x)-1$ дѣлился на $(x+1)^4$. Отдѣлить корни уравненія $f(x)=0$.

158. Если корни уравненія $f(x)=0$ вещественны и различны, то корни уравненія $ff''-f'^2=0$ мнимы. *Указаніе.* Разсмотрѣть дробь $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

159. Двойной корень уравненія $\varphi(x)^2+\psi(x)^2=0$ удовлетворяетъ уравненію $\varphi'(x)^2+\psi'(x)^2=0$, если функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ взаимно простыя.

160. Уравненія $\varphi(x)=0$ и $\psi(x)=0$ имѣютъ вещественные корни. Доказать, что при $\lambda>0$ уравненіе $\varphi(x)\varphi'(x)+\lambda\psi(x)\varphi(x)=0$ имѣетъ также вещественные корни (См. предыдущую задачу).

161. Если корни уравненія $f(x)=0$ вещественны, то будутъ вещественны и корни уравненія $hf(x)+xf'(x)=0$ при $h>0$. (См. задачу № 160).

162. На основаніи предыдущей задачи и черезъ примѣненіе теоремы Ролля доказать, что уравненіе $f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)=0$ имѣетъ вещественные корни, когда корни уравненія $f(x)=0$ вещественны.

163. Если корни уравненія $f(x)=0$ вещественны, то будутъ вещественными и корни уравненій $f(x)+xf'(x)=0$; $2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)=0$. *Указаніе.* Предложеніе доказывается на основаніи теоремы Ролля.

164. Если корни уравненія $f(x)=0$ вещественны, то будутъ вещественными и корни уравненія $f'(x)+af(x)=0$. *Указаніе.* Примѣнить теорему Ролля къ уравненію $e^{ax}f(x)=0$.

165. Пусть $f(x)$ полиномъ степени n. Если уравненіе $\Phi(x)=f(x)+af'(x)+a^2f''(x)+\ldots+a^nf^{(n)}(x)=0$ имѣетъ всѣ корни вещественные, то уравненіе $f(x)=0$ имѣетъ также всѣ корни вещественные. *Указаніе.* Примѣнить теорему Ролля къ функціи $e^{-\frac{x}{a}}\Phi(x)$.

166. Доказать, что уравненіе $P_n(x)=\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}=0$ имѣетъ n корни вещественные. *Указаніе.* Примѣнить теорему Ролля.

167. Доказать, что уравненіе $x^m+\binom{m}{1}^2x^{m-1}+\binom{m(m-1)}{1\cdot 2}^2x^{m-2}+\ldots+1=0$ имѣетъ всѣ корни вещественные. *Указаніе.* Лѣвая часть уравненія отличается только постояннымъ множителемъ отъ $\left[\frac{d^m(1+\alpha\sqrt{x})^m(\alpha+\sqrt{x})^m}{d\alpha^m}\right]_{\alpha=0}=\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^m P_m\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, гдѣ $P_m(u)=\frac{d^m(u^2-1)^m}{du^m}$ m-ый полиномъ Лежандра.

168. Доказать, что уравненіе $x^m+\frac{m}{1^2}x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1^2\cdot 2^2}x^{m-2}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}=0$ имѣетъ всѣ корни вещественные. *Указаніе.* Примѣнить теорему Ролля къ функціи x^me^x.

Сколько вещественныхъ корней имѣютъ уравненія. **169** $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}=0$?

170. $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}=0$?

171. Опредѣлить число вещественныхъ корней уравненія $f(x)=1+ax+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^n=0$. *Указаніе.* Обратить вниманіе на соотношеніе $(1-x)f'(x)=af(x)-\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}(a+n)x^n$ и воспользоваться теоремой Штурма.

172. Полиномы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ степеней m и n связаны соотношеніемъ: $(1-x)^n\varphi(x)+x^m\psi(x)=1$. 1. Доказать, что $\varphi(1-x)=\psi(x)$, $(1-x)\varphi'(x)=n\varphi(x)-\alpha x^{m-1}$, гдѣ α нѣкоторое постоянное. 2. Опредѣлить черезъ m коэффиціенты полинома $\varphi(x)$

и постоянное a. 3. Доказать, что уравнение $\varphi(x) = 0$ имѣетъ не болѣе одного вещественнаго корня.

173. Полиномъ степени n удовлетворяетъ ур-нію $nf(x) = (x - a) f'(x) + bf^{n}(x)$. Найти этотъ полиномъ. Доказать, что корни его заключаются въ предѣлахъ $a - \sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{|b|}$ и $a + \sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{|b|}$ и найти число вещественныхъ корней.

174. Числа b_j ($j = 1, 2, 3, \ldots n$) имѣютъ одинаковый знакъ. Пусть $f_n(x) + i\varphi_n(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - a_j - b_j i)$. Требуется доказать, что корни уравненія $pf_n(x) + q\varphi_n(x) = 0$ вещественны при произвольныхъ p и q. *Указаніе.* Если положить $v_n = pf_n + q\varphi_n$ (при немъ $v_0 = p$), то будемъ имѣть соотношеніе

$$v_n = \left\{x - a_n + \frac{b_n}{b_{n-1}}(x - a_{n-1})\right\} v_{n-1} - \left\{\frac{b_n}{b_{n-1}}(x - a_{n-2})^2 + b_n b_{n-2}\right\} v_{n-2};$$ съ помощью этого соотношенія и на основаніи теоремы Штурма получается требуемое доказательство.

175. Если $A_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, \ldots n$), то корни уравненія $\frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n} = 0$ вещественны.

176. Изслѣдовать природу корней уравненія $P_n(x) = 0$, гдѣ полиномъ $P_n(x)$ опредѣляется равенствомъ $\frac{d^n e^{x}}{dx^n} = \left(\frac{1}{x^{2n}} e^{x} P_n(x)\right)$. *Указаніе.* Примѣнить теорему Ролля.

177. Полиномъ $P_n(x)$ опредѣляется равенствомъ $P_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$. Доказать, что корни уравненія $P_n(x) = 0$ вещественны. *Указаніе.* Примѣнить теорему Ролля.

178. Полиномъ $P_n(x)$ опредѣляется равенствомъ $P_n(x) = (1 + x^2)^{n+1} \frac{d^n \frac{1}{1 + x^2}}{dx^n}$. Доказать, что всѣ корни уравненія $P_n(x) = 0$ вещественны. *Указаніе.* Примѣнить теорему Ролля.

ОТДѢЛЪ VII

Интегрированіе функцій.

Введеніе: простѣйшіе опредѣленные интегралы

1. $\int_0^1 x^{n-1}\,dx.$

2. $\int_1^2 \frac{dx}{x^{n+1}}$

3. $\int_0^1 \sqrt[m]{x^n}\,dx.$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[m]{x^n}}$

5. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2}$

6. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}$

7. $\int_1^0 \frac{dx}{1-x^2}$

8. $\int_3^2 \frac{dx}{x^2-1}$

9. $\int_1^2 \sin x\,dx.$

10. $\int_0^{\pi} \sin x\,dx.$

11. $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x\,dx,$

14. $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

15. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx$

17. $\int_0^1 \ln x\,dx.$

18. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{a^4+x^4}.$

19. $\int_0^x \frac{(2x^2-1)x}{(x^4-x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

20. $\int_1^{+1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^3}}\,dx.$

21. Вычислить $\int_0^1 (\sqrt{x^3} - 2\sqrt[3]{x})^2 (\sqrt{x^3} + 4\sqrt[3]{x})\,dx$ съ точностью до 0,1

22. $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^4}$ съ точностью до 10^{-4}

23. $\int_3^4 \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$ съ точностью до 10^{-6}.

24. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$ съ точностью до 10^{-4}.

25. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ съ точностью до 10^{-5}

Интегрированіе раціональныхъ функцій.

26. $\int (ax+b)\,dx.$

27. $\int \frac{Ax}{a+bx}\,dx.$

28. $\int \frac{dx}{1-x^2}$

29. $\int \frac{dx}{3x^2-2}$

30. $\int \frac{x^4\,dx}{x^2-1}$

31. $\int \frac{dx}{(2-x)^3}$

32. $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$

33. $\int \frac{x^4+2x^3-6x+5}{(x-2)^2(x-1)}\,dx$

34. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx.$

35. $\int \frac{dx}{(x+1)^3(x-1)^2}$

36. $\int \frac{3x^7-x^6-6x^5}{(x-1)^3(x+1)^5}\,dx,$

37. $\int \frac{dx}{(x+a)(x^2+b^2)}$

38. $\int \frac{dx}{(1+nx^2)(1-x^2)}$. Разсмотрѣть два случая: 1) $n>0$, 2) $n<0$ (n m).

39. $\int \frac{dx}{(x^2-x)^2}$

40. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

41. $\int \frac{x\,dx}{(1+x)(1+2x^2)(1+x^2)}$

42. $\int \frac{x^2+x^6+2}{(x^5-1)^2}\,dx$

43. $\int \frac{x^9+1}{x^6+x^4}\,dx.$

44. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^4}$

45. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$

46. $\int \frac{dx}{1+x}$

47. $\int \frac{dx}{x^3-1}$

48. $\int \frac{dx}{1+x^4}$

49. $\int \frac{1-x^4}{1+x^4}\,dx.$

50. $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^4}$

51. $\int \frac{dx}{1+x}$

52. $\int \frac{dx}{x(1-x^4)}$

53. $\int \frac{x\,dx}{1-x^4}$

54. $\int \frac{x^3\,dx}{(x^4+1)^2}$

55. $\int \frac{dx}{x^3(x^2+1)^2}$

56. $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$

57. $\int \frac{dx}{1-x^8}$

58. $\int \frac{1+x^4}{x^3-x^2+x-1}\,dx.$

59. $\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

60. $\int \frac{dx}{x(1+x+x^2+x^3)}$

61. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

62. $\int \frac{x-1}{x^4+x^2+1}\,dx$

63. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2-2}$

64. $\int \frac{2x^2+6x+8}{x^3+3x^2+2x}\,dx.$

65. $\int \frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$

66. $\int \frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}}{1+\frac{x}{2}+x^2+\frac{x^3}{2}}\,dx.$

Интегрированіе ирраціональныхъ функцій.

67. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$

68. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{x}}$

69. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

70. $\int \frac{dx}{(\sqrt{x+2a^2}+a)\sqrt{\sqrt{x+2a^2}-a}}.$

Указаніе. Подстановка $z=\sqrt{x+2a^2}-a$.

71. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-\cos^2\alpha(1+x^2)}}.$

Указаніе. Подстановка $\operatorname{arctg} x = z$.

72. $\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{a+bx}}$

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ при разныхъ комбинаціяхъ знаковъ при коэффиціентахъ a и c.

74. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

75. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

76. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$

77. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

78. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-ax}}$

80. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$

81. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+x+1}}.$

82. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$

83. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x-3}}.$

84. $\int x^2\sqrt{x^2+2}\,dx.$

85. $\int x\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$

86. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$

87. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx$

88. $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx.$

89. $\int \sqrt{3x^2-3x+1}\,dx.$

90. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$

91. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x-1}}$

92. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}.$

93. $\int \frac{x^2dx}{x+0{,}5+\sqrt{x^2+x+1}}.$

94. $\int \frac{(x-1)\,dx}{x\sqrt{x^2+3x^2+x}}$

95. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+x+2}}$

96. $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+3x}}\,dx$ *Указаніе.* Подстановка $a-x=\sqrt{2}\,z^2$.

97. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$

98. $\int \frac{dx}{(x^2+3)^2\sqrt{x}}$

99. $\int \frac{dx}{(x^4+x+1)^{3/2}}.$

100. $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\,dx$

101. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-1}}.$

102. $\int \frac{x}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}\,dx.$

Указаніе. Подстановка $\sqrt{1-2x^2}=z$.

103. $\int \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1+x^2}}$ въ предѣлахъ для x отъ -1 до 0.

104. $\int \frac{x^3-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$

105. $\int \sqrt{1+x^2}\,\frac{dx}{2+x^2}$

106. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}.$

107. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$

108. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

109. $\int \frac{a^2 dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-b^2-x^2}}$

Указаніе. Наиболѣе простая подстановка $x = \sin\varphi\sqrt{a^2-b^2}$.

110. $\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^4+x+1}}$.

111. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

112. $\int \frac{\sqrt{1+ax}}{x}\,dx.$

113. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$

114. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

115. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x^2}}$

116. $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

117. $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}$

118. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}$

119. $\int \frac{dx}{(x^3+3)\sqrt[3]{x^3+4}}$.

Интегрированіе трансцендентныхъ функцій.

120. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}\,dx$

121. $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

122. $\int \cos x\sin 3x\,dx.$

123. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x\cos^2 x}\,dx$

124. $\int \frac{1+tg^2 x}{(4+tg^2 x)\,tg^3 x}\,dx.$

125. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

126. $\int \frac{dx}{\cos x\cos\alpha}$.

127. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{12}\,dx.$

128. $\int \sin x\,lg\,tg\,x\,dx.$

129. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx.$

130. $\int \frac{2\sin x+1}{(2+\sin x)^2}\,dx.$

131. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$.

132. $\int \frac{lg\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$

133. $\int \frac{lg\,tg\,x}{\sin^2 x}\,dx.$

134. $\int x\,cotg^2 x\,dx.$

135. $\int \sqrt{1+\sin x}\,dx$

Указаніе. $1-\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$ (къ № 135).

136. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sin x}}$.

137. $\int \sqrt{b^2-a^2\sec^2 x}\,dx.$

138. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+tg\,x}$.

139. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$.

140. $\int \frac{1+tg^2 x}{1-tg^2 x}\,dx.$

141. $\int \frac{1+tg\,x}{\sin 2x}\,dx$

142. $\int \frac{1-tg\,x}{1+tg\,x}\,dx$

143. $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$, если $a^2>b^2$ и $a^2<b^2$.

146. $\int \left(\frac{x}{x\sin x+\cos x}\right)^2 dx.$

145. $\int \frac{2\sqrt{tg\,x-1}\,dx}{(1+\cos 2x)\sqrt{1+tg\,x}}$

146. $\int \frac{dx}{a^2-m^2\sin^2 x}$, гдѣ $a^2 \geqq m^2$.

147. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\sqrt{9\cos^2 x-1}\,dx.$

148. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin 2x}}$.

Указаніе. Подстановка $tg\,x = z$

149. $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx.$ *Указаніе.* Числитель представить въ видѣ $\cos(45-x)$, а знаменатель $\sqrt{\sin 2x}-\sqrt{\cos(90-2x)}$.

150. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^3 2x}}$.

151. $\int \frac{dx}{lg_x e}$, гдѣ e основаніе натуральныхъ логариѳмовъ.

152. $\int lg^3 x\,dx$

153. $\int lg\,(1+x^4)\,dx$

154. $\int \frac{lg\,x}{(2x+5)^3}\,dx$

155. $\int \frac{lg\,(x-1)}{(x+1)^3}\,dx$

156. $\int \frac{lg\,(x^2-x+1)}{x^2}\,dx$

157. $\int \frac{x\,lg\,x}{(x^2-1)^{3/2}}\,dx.$

158. $\int lg\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{x\sqrt{x}}$

159. $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,lg\,\frac{x^2+b^2}{b^2}\,dx$

160. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,lg\,\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$

161. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx.$

162. $\int xe^{x^2}(x^2+1)\,dx.$

163. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}.$

164. $\int 2^x \cos x\,dx.$

165. $\int 3^x \sin x\,dx.$

166. $\int e^x \sin 3x\,dx.$

167. $\int (\arcsin x)^2\,dx.$

168. $\int \frac{\arcsin x\,dx}{x^2}.$

169. $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

170. $\int \mathrm{arctg}\,\frac{a}{x-a}\,dx.$

171. $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{(x^2-1)^2}\,dx.$

172. $\int \frac{\mathrm{arctg}\,x}{(1+x)^3}\,dx.$

173. $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

174. $\int \frac{dx}{e^{x^2}(\cos 2x)^{3/2}}$ *Указаніе*, Подстановка $e^{2x^2}=z$,

175. $\int \frac{e^{x^2}\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}$

Интегрированіе гиперболическихъ функцій.

176. $\int \frac{a+b\,ch\,x}{a\,ch\,x+b}\,dx.$

177. $\int \frac{dx}{(1+ch^2 x)^2}$

178. $\int \frac{dx}{(1+ch\,x)^2}.$

179. $\int (ch\,x+sh\,x)\sqrt{ch\,x-sh\,x}\,dx.$

180. $\int \frac{x+sh\,x}{ch\,x-sh\,x}\,dx.$

181. $\int \frac{ch^3 x\,dx}{1-th\,x}.$

182. $\int \frac{ch^3 x-sh^3 x}{ch^3 x+sh^3 x}\,dx.$

183. $\int \frac{th\,x}{\sqrt{1-th\,x}}\,dx.$

184. $\int \frac{ch^2\frac{x}{2}\,dx}{1+sh\,x}$

185. $\int \frac{dx}{1-sh^4 x}$

186. $\int \frac{sh^3 x\,dx}{\sqrt{ch\,x}}.$

187. $\int \frac{dx}{sh^3 x}.$

188. $\int \frac{\sqrt{a^2-sh^2 x}}{sh\,2x}\,dx.$

189. $\int ch\,x\,ch\,2x\,ch\,3x\,dx$

190. $\int coth^5 x\,dx.$

191. $\int th^3 x\,dx$

192. $\int \sqrt{th\,x}\,dx.$

Простѣйшія приложенія интегральнаго исчисленія къ геометріи.

Вычисленіе площадей.

Найти площадь, ограниченную кривою: 193. $y=x\sin x$ и осью OX въ предѣлахъ для x отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$.

194. $y = e^x + e^{-x} - 2\cos x$ и осью OX въ предѣлахъ для x отъ 0 до π.

195. $y = \pm\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ и осью OY.

196. $y = \pm\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ и осью OX въ предѣлахъ для x отъ -1 до 0.

197. $y = x\sqrt{x^2+1} - x^2$ и осью OY въ предѣлахъ для x отъ 0 до 1.

198. $y = \lg(x^2 - 3x + 2)$ и осью OX въ предѣлахъ для x отъ 0 до $x < 1$.

199. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ и осью OX въ предѣлахъ для x отъ 0 до $\frac{1}{2}$.

200. $x = a\lg\left[\frac{\sqrt{a^2-y^2}+a}{y}\right] - \sqrt{a^2-y^2}$ (трактуаръ) и осью OX въ предѣлахъ для y отъ a до 0.

201. $y = \frac{e\sqrt{1-x}}{1+x}$ и осью OX въ предѣлахъ для x отъ 0 до 1.

202. $r^2 = a^2\cos 2\theta$ (лемниската).

203. $r^2\cos 2\theta = 1$ (равносторонная гипербола) и прямыми $\theta = a$ и $\theta = -a$.

204. $r^2 = a^2\frac{\sin 3\theta}{\cos\theta}$ и прямыми $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{3}$.

205. $r = a\cos\theta$. Вычертить кривую. **206.** $r = a\cos 2\theta$. Вычертить кривую.

207. $r = a\cos 3\theta$. Вычертить кривую. **208.** $r = a\cos 4\theta$. Вычертить кривую.

209. Найти площади фигуръ, ограниченныхъ линіями, уравненія которыхъ въ полярныхъ координатахъ суть $r = a^2\cos\theta$ и $\theta = \frac{\pi}{4}$.

210. Найти площадь эллипса $r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$, гдѣ $e < 1$, въ предѣлахъ для φ отъ 0 до π.

211. Найти площадь эллипса $r = \frac{1}{1+0{,}5\cos\varphi}$ въ предѣлахъ для φ отъ 0 до φ, а также полную площадь.

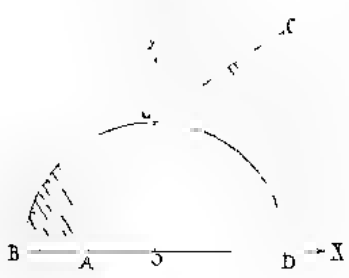
212. Найти площадь гиперболы $r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$, гдѣ $e > 1$, въ предѣлахъ для φ отъ 0 до φ.

213. Найти площадь, ограниченную улиткой Паскаля $r = 2a(2+\cos\theta)$.

214. Найти площадь фигуры, ограниченной осью абсциссъ и кривыми: 1) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ и 2) $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 2a$.

215. Найти площадь перваго сегмента, отсѣкаемаго отъ кривой $y = x + \sin x$ прямою $y = x$.

216. Найти величины площадей ABL и LCD, заключающихся между окружностью BLD, уравненіе которой $x^2 + y^2 = 4a^2$, параболы ALC, уравненіе которой $y^2 = a(a+x)$ и касательной въ точкѣ D къ окружности (черт. 33).



Черт. 33.

217. Найти площадь, заключенную между кругомъ $x^2 + y^2 = 2px$ и параболой $y^2 = 2px$.

218. Найти величины площадей, на которыя кругъ $x^2 + y^2 = 4a^2$ дѣлится параболой $y^2 = 4a(a+x)$.

219. Найти площадь луночки вырѣзываемой изъ параболы $y^2 = 2x$ окружностью $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$.

220. Найти общую площадь кривыхъ, заданныхъ уравненіями: $x^2 + 4y^2 = 8$ и $x^2 = 3y^2 = 1$.

221. Найти общую площадь кривыхъ, заданныхъ уравненіями $x^2 = 4x$ и $y = 2x^2$.

222. Найти площадь, ограниченную кривыми $y^2 = 2px$, $y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3$.

223. Данъ полусегментъ AOB круга радіуса r и высотою h (гдѣ $h < r$). Найти площадь части $ACmn$, если mn проведено параллельно AOB на разстояніи x (черт. 34).

224. Опредѣлить площадь, заключенную между одною вѣтвью гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ и двумя прямыми, проходящими черезъ начало координатъ и наклоненными подъ углами $+\varphi$ и $-\varphi$ къ оси OX.

Указаніе. Воспользоваться полярными координатами.

225. Зная, что $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$ есть полярное уравненіе равнобочной гиперболы съ полуосями, равными a, найти площадь гиперболическаго сектора между двумя радіусами-векторами, составляющими равные углы φ по обѣ стороны вещественной оси.

226. Опредѣлить площади, заключающіяся между осью OX и кривою (циклоидою): $x = r \arccos \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$ въ предѣлахъ для y-ка: отъ 0 до r и отъ r до $2r$.

Черт. 34

Найти площадь, ограниченную кривой:

227. $x = a \cos t$, $y = \frac{a \sin^2 t}{2 + \sin t}$ (Bicorne).

228. $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$ (лемниската).

229. $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ (подэръ эллипса).

230. $a^2y^4 = r^2 (a^2 - r^2)$.

231. Найти площадь, ограниченную параболой и какою-либо изъ ея нормалей.

232. Найти площадь сѣченія поверхности $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x}$ плоскостью $x = y = z = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Вычисленіе длины дугъ.

Найти длину дуги кривой: **233.** $x = \sqrt{y}$ въ предѣлахъ для y отъ 0 до 1.

234. $y = \lg x$ въ предѣлахъ для x отъ $\sqrt{3}$ до $\sqrt{8}$.

235. $y = 1 - \lg \cos x$ въ предѣлахъ для x отъ 0 до $\frac{\pi}{4}$.

236. $y = a \lg \cos \frac{x}{a}$ отъ точки $(0, 0)$ до (x, y).

237. $y^2 = 2px$ въ предѣлахъ для y отъ 0 до y_0.

238. $y^3 = px^2$ въ предѣлахъ для y отъ 0 до y_0.

239. $x^2 + y^2 = a^2x$ въ предѣлахъ для x отъ 0 до a.

240. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ отъ точки $(0, 0)$ до (x_0, y_0).

241. $y^2 = \frac{8}{27} \frac{(x - p)^3}{p}$ (одной вѣтви) въ предѣлахъ для x отъ p до $2{,}5\,p$.

242. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроида).

243. $x = a \lg \left[\frac{\sqrt{a^2 - y^2} + a}{y} \right] - \sqrt{a^2 - y^2}$ (трактуаръ) въ предѣлахъ для y отъ b до a, причемъ $0 < b < a$.

244. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ въ предѣлахъ для t отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ (для перваго координатнаго угла).

245. $x = a \cos^5 t$, $y = a \sin^5 t$ въ предѣлахъ для t отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ (для перваго координатнаго угла).

246. $r = a(1 + \cos \theta)$ (кардіоида). **247.** $r = a^2 \cos \theta$.

248. $r = ae^{k\theta}$ въ предѣлахъ для r отъ 0 до a.

249. $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ отъ точки 0 (0, 0, 0).

250. $z^2 = 2ax$, $xy = 9y^2 = 16z$ отъ точки 0 (0, 0, 0).

251. $y^2 = 4ax$, $z = b \arccos \frac{b - x}{b} + \sqrt{2bx - x^2}$ въ предѣлахъ для x отъ 0 до x_1.

252. $x = 2a^2t$, $y = 3abt^2$, $z = 3b^2t^3$ отъ точки 0, 0, 0, $t > 0$.

253. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ отъ точки (1, 0, 1), $t > 0$.

Вычисленіе объемовъ.

Найти объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія кривой:

254. $y^2 = \frac{x^2}{2a - x}$ вокругъ оси OX въ предѣлахъ для x отъ 0 до x.

255. $xy^2 = 1 - x$ вокругъ оси OX въ предѣлахъ для x отъ $\frac{1}{2}$ до 1 и вокругъ оси OY въ предѣлахъ для y отъ -1 до $+1$.

256. $xy = a^2$ (одной вѣтви) вокругъ оси O_1Y_1, пересѣкающей разсматриваемую вѣтвь гиперболы и проведенной параллельно оси OY на разстояніи p, въ предѣлахъ для y отъ $y_0 = \frac{a^2}{p}$ до $y = q$.

257. $4x^2 - y^2 = 1$ (одной вѣтви) вокругъ касательной къ вершинѣ данной вѣтви гиперболы, въ предѣлахъ для y отъ 0 до $\sqrt{3}$.

258. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (лемниската) вокругъ оси OX.

259. Найти объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія вокругъ оси абсциссъ фигуры, ограниченной гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, прямой $2ay - bx = 0$ и осью абсциссъ.

260. Найти объемъ тѣла происшедшаго отъ вращенія вокругъ оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y = x + a\sin\frac{2x}{n}$ и $2x^2 = ny$.

261. Найти объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія вокругъ оси OY сегмента, отсѣкаемаго отъ параболы $y^2 = 2x$ прямою $2y = (2x - 1)\sqrt{3}$.

Найти объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія кривой.

262. $r = a^{\theta\cos\theta}$ вокругъ полярной оси.

263. $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$ вокругъ оси OY.

264. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и прямой, расположенной по оси абсциссъ, вокругъ прямой $x = 2a$.

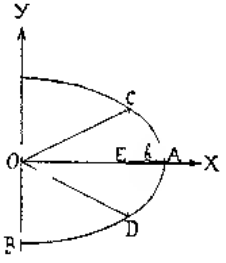
265. Найти объемъ параболической зоны, происшедшей отъ вращенія дуги параболы $y^2 = 2px$ вокругъ оси OY въ предѣлахъ для y отъ y_0 до y.

266. Найти объемъ эллиптической зоны, происшедшей отъ вращенія дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокругъ большой оси a въ предѣлахъ для x отъ x_0 до x.

267. Найти объемъ гиперболической зоны, происшедшей отъ вращенія дуги гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокругъ вещественной оси въ предѣлахъ для x отъ x_0 до x.

268. Найти объемъ гиперболической зоны, происшедшей отъ вращенія дуги гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокругъ мнимой оси въ предѣлахъ для y отъ y_0 до y.

269. Эллипсъ AB съ полуосями $OA = a$ и $OB = b$ вращается около большой оси OX. Опредѣлить объемъ эллиптическаго сектора $OCAD$, если его высота AE равна h (черт. 35).



Черт. 35.

270. Найти объемъ тѣла, вырѣзаемаго изъ параболоида $x^2 + y^2 = 2z$ сферою $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$.

Найти объемъ тѣла, ограниченнаго поверхностями

271. $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$.

272. $x^2 + y^2 = ax$, $x = z = 0$ и $x + z = 0$.

273. $x^2 + 4y^2 = 8z$; $x^2 + 4y^2 = 1$ и $z = 0$.

274. $y^2 = 2p(a - x)$, $x = z = 0$; $x = 2z = 0$.

275. $z = 0$; $x^2 + 4y^2 = 4$, $x = 2z + 2 = 0$.

276. $z^2 + x^2 + y^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$.

277. $z^2 = b(a - x)$, $x^2 + y^2 = ax$, $z = 0$. **278.** $z = 0$, $x + y + z = a$, $az = xy$.

279. $x^2 + y^2 = (x + y + z^2)$ (отъ начала координатъ) и $x + y + z\sqrt{2} = 2$.

280. $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$; $x^2 + y^2 = z^2 = 1$, $z = -1$, $z = +1$.

281. $a^2y^2 = x^2(R^2 - x^2)$, $x = \pm a$.

282. $z = 0$; $z^2 = 2p(a + x)$; $z^2 = 2p(a - x)$, $\sqrt{2pa}(y - b) + bz = 0$, $\sqrt{2pa}(y + b) - bz = 0$.

283. $z = 0$; $by = x(a - z)$; $by = x(a + z)$; $x = b$ (клинообразное тѣло).

284. $z = 0$; $h(x - 2a) + az = 0$; $h(x + 2a) + (b - 2a)z = 0$; $h(y - 2a) + 2az = 0$; $h(y + 2a) - 2az = 0$ (обелискъ) $2a > b > 0$; $h > 0$.

285. $x^2 + 2y^2 = z^2 + 2xz - 2yz + 2x - 2y + 2z + 2 = 0$, $z = \sqrt{2}$ и $z = -\sqrt{2}$.

286. $x^2 + 2y^2 = z^2 + 2xz - 4yz + 2x - 4y + 6z + 3 = 0$, $z = 0$ и $z = 1$.

287. $4(y^2 + z^2) = a^2(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})^2$ (катеноидъ), $x = -b$ и $x = +b$.

288. Въ прямой круговой цилиндрическій стаканъ радіуса r, плоскость осно-

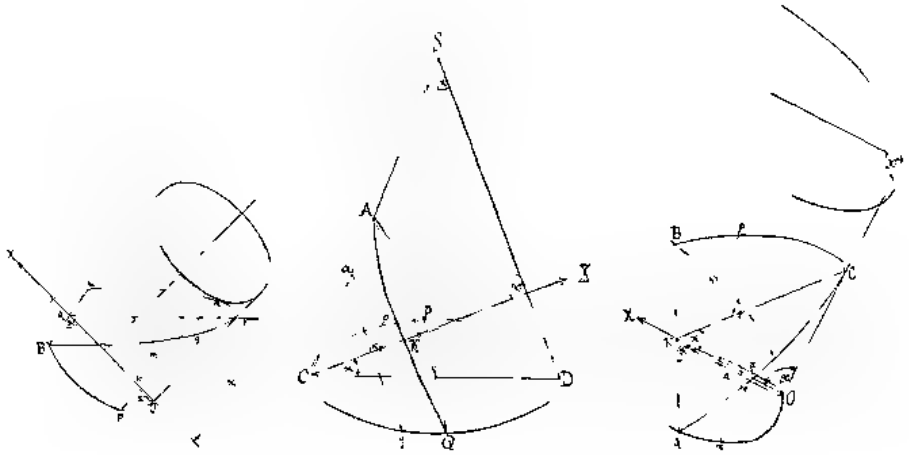
ванія котораго наклонена къ горизонту подъ угломъ α, налита вода. Уровень воды BAC находится на данномъ разстояніи $AO = a$ отъ нижайшей точки O стакана, причемъ $0 \leqq a \leqq 2r$. Опредѣлить объемъ воды въ стаканѣ (черт. 36).

Указаніе: сѣченіе плоскостью, перпендикулярною къ OX, даетъ прямоугольникъ $mnqp$, площадь котораго опредѣляется въ функціи разстоянія $Ok = x$.

289. Прямой круговой конусъ радуса r и высоты h разсѣченъ на двѣ части плоскостью APQ, проходящею черезъ центръ кругового основанія C параллельно образующей SD. Найти объемы обѣихъ частей, если діаметры OD и PQ взаимно перпендикулярны (черт. 37).

Указаніе: сѣченіе плоскостью параллельно плоскости APQ даетъ параболу apq. Площадь apq можетъ быть выражена въ функціи разстоянія $Ok = x$ плоскости apq отъ точки O по нормали OX къ SD.

290. Прямой цилиндръ съ параболическимъ основаніемъ $y^2 = 2px$ пересѣченъ плоскостью ABC подъ угломъ α къ оси OX параболическаго основанія. Зная, что линія



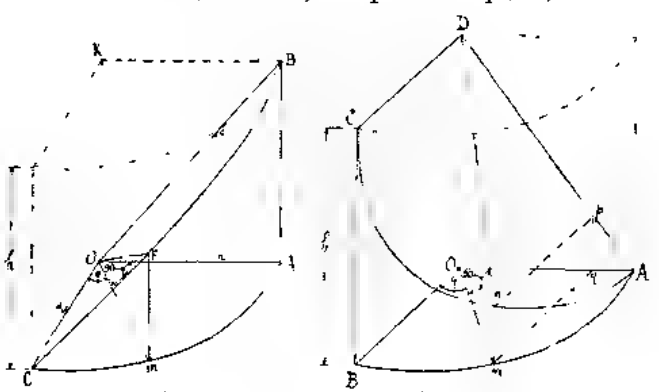
Черт. 36. Черт. 37. Черт. 38.

пересѣченія AB перпендикулярна къ оси OX и отрѣзокъ $OK = a$, найти объемъ части $ABCO$ (черт. 38).

Указаніе: сѣченіе $mnpq$ есть прямоугольникъ.

291. Четверть объема прямого кругового цилиндра радуса r и высоты h раздѣлена плоскостью BOC на двѣ части: нижнюю (объема V) и верхнюю (черт. 39). Нижняя часть въ свою очередь раздѣлена на двѣ части: правую и лѣвую (объема V_1) плоскостью, проходящею черезъ ось цилиндра и составляющею уголъ $COm = \varphi$ съ гранью CK. Опредѣлить объемы: 1) всей нижней части V — объему $BAOC$; 2) лѣвой части V_1 — объему $pOCm$.

Указаніе: сѣченіе плоскостью, параллельною грани KC, есть прямоугольникъ (напр., $mqpn$).



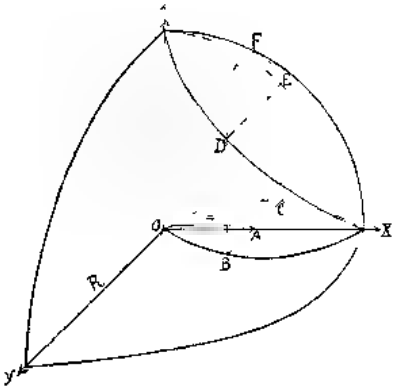
Черт. 39. Черт. 40.

292. Четверть объема прямого кругового цилиндра радуса r и высоты h раздѣлена плоскостью ACD на двѣ части: нижнюю (объема V) и верхнюю. Нижняя часть въ свою очередь раздѣлена на двѣ части: правую и лѣвую (объема V_1) плоскостью,

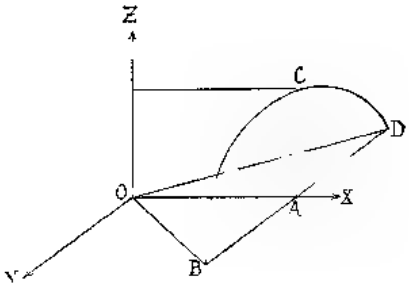
проходящею черезъ ось цилиндра и составляющей уголъ $BOm = \varphi$ съ гранью BD. Опредѣлить объемы 1) всей нижней части V и 2) лѣвой части V_1 (черт. 40

Указаніе: сѣченіе плоскостью, параллельною грани BD, есть прямоугольникъ (напр., $mnpq$).

293. Найти объемъ, общій шару радіуса R и прямому круговому цилиндру діаметра R, если центръ шара лежитъ на поверхности цилиндра (черт. 41).



Черт. 41.



Черт. 42

Указаніе: сѣченіе параллельно ZOY состоитъ изъ прямоугольника $BDEC$ и сегмента DFE. Площадь этого сѣченія можно выразить въ функціи отъ x.

294. Найти объемъ коноида, образованнаго движеніемъ прямой, остающейся все время параллельной плоскости XOY и скользящей однимъ концомъ по оси OZ, а другимъ по дугѣ эллипса BCD съ полуосями $AB = b$ и $AC = c$, расположеннаго въ плоскости, параллельной ZOY, съ центромъ A на оси OX въ разстояніи $AO = l$ отъ 0. Уравненіе поверхности коноида $\frac{c^2l^2y^2}{b^2} = x^2(c^2 - z^2)$ черт. 42).

Вычисленіе поверхностей.

295 Найти поверхность тѣла, происшедшаго отъ вращенія прямой $y = mx + n$ вокругъ оси OX въ предѣлахъ для x отъ a до b.

Найти поверхность тѣла, происшедшаго отъ вращенія кривой:

296 $x^2 + y(y - 2b) = 0$ вокругъ оси OY.

297 $y = \sin x$ вокругъ оси OX въ предѣлахъ для x отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$.

298 $y = tg\, x$ вокругъ оси OX въ предѣлахъ для x отъ 0 до π

299. $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ вокругъ оси OY при условіи $a > r$.

300 $x^2 + y^2 = a^2x$ вокругъ оси OX въ предѣлахъ для x отъ 0 до a^2.

301. $y^2 = 2px$ вокругъ оси OX

302. $y^2 = pa^2$ вокругъ оси OX въ предѣлахъ для y отъ 0 до y_0.

303. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, гдѣ $a > b$, вокругъ оси абсциссъ OX (продолгов. эллипсоидъ)

304. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, гдѣ $a > b$, вокругъ оси ординатъ OY (сжатый эллипсоидъ).

305. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокругъ оси абсциссъ OX (двуполый гиперболоидъ).

306. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокругъ оси ординатъ OY (однополый гиперболоидъ).

307. $x = r \arccos \frac{r - y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$ (циклоида) вокругъ оси OX въ предѣлахъ для y отъ 0 до y и отъ 0 до $2r$.

308. $r = a^2 \cos \theta$ вокругъ полярной оси.

309. $r^2 \cos 2\theta = 1$ (одной вѣтви) вокругъ полярной оси.

Указаніе перейти къ прямоугольнымъ координатамъ, предѣлы для x отъ 0 до x.

310. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ вокругъ оси OX.

311. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ вокругъ оси OY

312. $x = a\,lg\left[\frac{\sqrt{a^2 - y^2} + a}{y}\right] - \sqrt{a^2 - y^2}$ (трактуаръ) вокругъ оси OX въ предѣлахъ для y отъ a до 0.

313. Найти поверхность части параболоида $x^2 + y^2 = 2z$, заключающейся внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 8$.

314. Найти поверхность тѣла, вырѣзаемаго изъ параболоида $x^2 + y^2 = 2z$ сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 6z = 0$.

315. Найти величину обѣихъ поверхностей (ихъ сумму), вырѣзываемыхъ на сферѣ радіуса R прямымъ круговымъ цилиндромъ діаметра R, если при этомъ на поверхности цилиндра находится центръ сферы.

ОТДѢЛЪ VIII.

Кра́тные интегралы.

а) Двойные интегралы.

Вычисленіе площадей.

Вычислить площади, ограниченныя слѣдующими линіями (всѣ входящіе въ уравненія параметры a, b, c и т. п. считаются положительными):

1. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{2xy}{c^2}$.
2. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$.
3. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3=\frac{x^4}{h^4}+\frac{y^4}{k^4}$.
4. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$.
5. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^3}{h^3}+\frac{y^3}{k^3}$.
6. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{3xy}{c^2}$ (петля).
7. $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{xy}{c^2}$.
8. $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{c^2}$.
9. $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$
10. $cx\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=y^2$, $x=\frac{b^2}{c}$.
11. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$, $y=0$.
12. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{x^2}{h^2}$, $y=0$.
13. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^2}$ (петля).
14. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$, $y=0$.
15. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{x^3}{h^2}$, $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{y^2}{k^2}$ $(x>0,\ y>0)$.
16. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2y}{c^3}$ (петля).
17. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$, $x=0$, $y=0$.
18. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^3}{h^3}-\frac{y^2}{k^2}$, $y=0$.
19. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{x^2y^2}{c^4}$ (петля).
20. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{x^3}{h^3}-\frac{y^3}{k^3}$, $y=0$.
21. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=2$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $3\sqrt{3}\,\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ $(x>0,\ y>0)$.
22. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^6=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$.
23. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^{12}=\frac{xy}{c^2}$ (петля).
24. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$, $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $\frac{x}{a}=9\,\frac{y}{b}$ $(x>0,\ y>0)$.
25. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^8=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$, $x=0$, $y=0$.
26. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^{12}=\frac{xy}{c^2}$ (петля).
27. $x=y$, $x=2y$, $x+y=a$, $x+3y=a$.
28. $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(a>b,\ \alpha>\beta)$.
29. $x^2=ay$, $x^2=by$, $y=m$, $y=n$, $x>0$ $(a>b,\ m>n)$.
30. $xy=a^2$, $xy=b^2$, $y=m$, $y=n$, $(a>b,\ m>n)$.

31. $y^2 = mx$, $y^2 = nx$, $x = \alpha y$, $x = \beta y$ $(m > n,\ \alpha > \beta)$
32. $xy = a^2$, $xy = b^2$, $x = \alpha y$, $x = \beta y$ $(a > b,\ \alpha > \beta)$, $x > 0$, $y > 0$.
33. $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $x^2 = my$, $x^2 = ny$ $(a > b,\ m > n)$.
34. $xy = a^2$, $xy = b^2$, $y^2 = mx$, $y^2 = nx$ $(a > b,\ m > n)$.
35. $x^3 = a^2y$, $x^3 = b^2y$, $y^3 = c^2x$, $y^3 = d^2x$ $(a > b,\ c > d)$, $x > 0$, $y > 0$.
36. $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $x^3 = cy^2$, $x^3 = dy^2$ $(a > b,\ c > d)$.
37. $x^3 = a^2y$, $x^3 = b^2y$, $x^2 = cy$, $x^2 = dy$ $(a > b,\ c > d)$.
38. $y^2 = a^2 - 2ax$, $y^2 = b^2 - 2bx$, $y^2 = m^2 + 2mx$, $y^2 = n^2 + 2nx$, $y > 0$ $(a > b,\ m > n)$.
39. $(x - y)^2 + x + y - 2 = 0$, $(x - y)^2 + 2x + 2y - 3 = 0$.
40. $\dfrac{x^2}{ch^2 u_0} + \dfrac{y^2}{sh^2 u_0} = c^2$, $\dfrac{x^2}{ch^2 u_1} + \dfrac{y^2}{sh^2 u_1} = c^2$ $(u_1 > u_0)$,
$\dfrac{x^2}{\cos^2 v_0} - \dfrac{y^2}{\sin^2 v_0} = c^2$, $\dfrac{x^2}{\cos^2 v_1} - \dfrac{y^2}{\sin^2 v_1} = c^2$ $(v_1 > v_0)$, $x > 0$, $y > 0$.

Вычисленіе объемовъ.

Вычислить объемы, ограниченные слѣдующими поверхностями.

41. $z^2 = xy$, $x = a$, $y = b$, $z = 0$.
42. $(x - a)^2 + y^2 = R^2$, $y + z = R$, $z = 0$.
43. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $y = \dfrac{b}{a}x$, $y = 0$, $z = 0$.
44. $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(a \geqq R\sqrt{2})$.
45. $x + y + z = a$, $3x + y = a$, $\dfrac{3}{2}x + y = a$, $y = 0$, $z = 0$.
46. $z^2 = 2px$, $y^2 = 2q(a - x)$.
47. $x^2z^2 + a^2y^2 = c^2x^2$, $x = 0$, $x = a$.
48. $y^2 + z^2 = x$, $x = y$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.
49. $z = xy$, $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, $z \geqq 0$.
50. $z = x + y + 1$, $y + 1 = x^2 - x$, $x + y = 1$, $z = 0$.
51. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, $a^2y = bx^2$, $x = a$, $y = 0$, $z = 0$.
52. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$.
53. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$, $x = 0$.
54. $y^2 + z^2 = a^2$, $y^2 = 2ax$, $x = 0$, $y = \dfrac{4}{5}a$, $z = 0$.
55. $z = \cos x \cos y$, $x + y = \dfrac{\pi}{2}$, $x - y = \dfrac{\pi}{2}$, $-x - y = \dfrac{\pi}{2}$, $x + y = \dfrac{\pi}{2}$, $z = 0$.
56. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = R^2$ $(a > R)$.
57. $x^2 + y^2 = cz$, $x^2 + y^2 = ax$, $z = 0$.
58. $x^2 + y^2 = 2ax$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ $(\alpha > \beta)$.
59. $x^2 + y^2 = \alpha z^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $z = 0$.
60. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = z$.
61. $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$.
62. $x^2 + y^2 = az$, $x + z = 2a$.
63. $2cz = y^2 - x^2 + 2xy \cot\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$, $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $z = 0$, $y > 0$.
64. $cz = xy$, $x^2 + y^2 = ax$, $z = 0$, $y > 0$, $x > 0$.
65. $x^2 + y^2 = cz$, $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$, $z = 0$.
66. $z^2 = 2xy$, $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, $z = 0$, $y > 0$, $x > 0$.
67. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.
68. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4 - 6x^2y^2)$.
69. $x^2 + y^2 = 2pz$, $x + y + z = a$.
70. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $(x^2 + y^2)^{3/2} = a(x^2 - y^2)$.
71. $z = \dfrac{a^2x + b^2y}{x + y}$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
72. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $2(x^2 + y^2)x^2 = 3(x^2 - y^2)$.
73. $z = x^2 + y^2$, $x^2 = xy$.
74. $y^2 = a^2(y - z)$, $x^2 + y^2 = a^2$, $x = 0$, $z = 0$.
75. $z = x + y$, $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$.
76. $a^2y^2 = x^2y^2 + c^2x^2$, $x^2 + y^2 = 2ax$.
77. $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $x^2 + y^2 = 2Rz$, $x^2 + y^2 = z^2$.
78. $xy = az$, $x + y + z = a$, $z = 0$.
79. $z = e^{-x^2 - y^2}$, $z = 0$.
80. $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.
81. $cz = xy$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$.
82. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.
83. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^k + \dfrac{z}{c} = 1$, $z = 0$.

84. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad z+c=0.$

85. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^{2m}}{c^{2m}}=1$

86. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-c)^2}{c^2}=1.$

87. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h},\quad z=0.$

88. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},\quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x}{h},\quad z=0$

89. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},\quad \frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\quad z=0.$

90. $z^2=2xy,\quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{2xy}{c^2},\quad z=0\quad y=0,\quad x>0.$

91. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{4xy}{c^2},\quad z=0.$

92. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=2.$

93. $cz=xy,\quad \frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2},\quad z=0,\quad y>0,\quad x>0.$

94. $2z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q},\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z\geqq 0.$

95. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}$

96. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$

97. $z^2=xy,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=3,\quad \frac{x}{a}=3\frac{y}{b},\quad 3\frac{x}{a}=\frac{y}{b},\quad z=0.$

98. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

99. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

100. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^k+\frac{z}{c}=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

101. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^k=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

102. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

103. $z=x^2+y^2,\quad x+y=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

104. $z^2=xy,\quad x+y=1,\quad z=0.$

105. $2z^2+x+y^2=2a^2,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$

106. $cz=xy,\quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{xy}{ab},\quad z=0\ (x>0,\quad y>0).$

107. $z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q},\quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{10}=\frac{xy}{c^2},\quad z=0\ (x>0,\quad y>0)$

108. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,\quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a},\quad y=0,\quad z=0.$

109. $z^2=xy,\quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{y}{b^2},\quad z=0\ (x>0,\quad y>0).$

110. $\frac{z}{c}=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4,\quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^7=\frac{x}{h}-\frac{y}{k},\quad y=0,\quad z=0.$

111. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^3+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$

112. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^6+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$

113. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^3+\left(\frac{z}{c}\right)^{2k}=1.$

114. $z^2=cxy,\quad \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^4=\frac{xy}{h^2},\quad z=0\ (x>0,\quad y>0).$

115. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^8+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

116. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^{2k}+\frac{z}{c}=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

117. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^4+\left(\frac{z}{c}\right)^k=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,$

118. $z=ye^{-\frac{xy}{a^2}},\quad xy=a^2,\quad xy=2a^2,\quad y=m,\quad y=n,\quad z=0\ (m>n).$

119. $z^2=xy,\quad y^2=mx,\quad y^2=nx,\quad x=\alpha y,\quad x=\beta y,\quad z=0\ (m>n,\ \alpha>\beta).$

120. $cz=xy,\quad y^2=mx,\quad y^2=nx,\quad x=\alpha y,\quad x=\beta y,\quad z=0\ (m>n,\ \alpha>\beta).$

121. $cz=xy,\quad xy=a^2,\quad xy=4a^2,\quad x=y,\quad x=9y,\quad z=0\ (x>0,\ y>0).$

122. $z^2=xy,\quad xy=a^2,\quad xy=4a^2,\quad x=2y,\quad x=3y,\quad z=0\ (x>0,\ y>0).$

123. $z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q},\quad xy=a^2,\quad xy=2a^2,\quad x=2y,\quad x=3y,\quad z=0\ (x>0,\ y>0).$

124. $z=c\sin\frac{\pi xy}{4a^2},\quad xy=a^2,\quad xy=4a^2,\quad x=y,\quad x=2y,\quad z=0\ (x>0,\ y>0).$

125. $cz=xy,\quad y^2=2ax,\quad y^2=3ax,\quad x^2=by,\quad x^2=2by,\quad z=0.$

126. $z^2=xy,\quad y^2=ax,\quad y^2=4ax,\quad x^2=y,\quad x^2=9y,\quad z=0.$

127. $z^2=xy,\quad xy=a^2,\quad xy=4a^2,\quad y^2=bx,\quad y^2=3bx,\quad z=0.$

128. $cz=xy,\quad x=a,\quad x=2a,\quad y=bx,\quad y=2bx,\quad z=0.$

129. $c^2y=x^3(x^2+y^2),\quad x^2=ay,\quad x^2=by,\quad y=mx,\quad y=nx,\quad z=0\ (m>l,\ m>n).$

130. $c^2=xy,\quad y^2=ax,\quad y^2=2ax,\quad y^2=mx+2mx,\quad y=0,\quad z=0.$

Моменты инерціи и центры инерціи плоскихъ фигуръ.

Вычислить моменты инерціи однородныхъ плоскихъ фигуръ, ограниченныхъ слѣдующими линіями (масса всей фигуры предполагается данною и равною M):

131. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad y=0$ относ. прямой $y=0$.

132. $y^2=2px,\quad 2px=l^2$ относ. прямой $y=0$.

133. $y^2=2px,\quad x=h$ относ. прямой $x=h$.

134. $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad y=0$ — относ. прямой $y=0$.

Вычислить координаты центра инерціи однородныхъ плоскихъ фигуръ, ограниченныхъ слѣдующими линіями:

135. $x^2=2py,\quad x=-p,\quad x=p$.

136. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},\quad x=0,\quad y=0$.

137. $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$ и $x=a$.

138. $x^2+y^2=R^2,\quad y=0,\quad y=x\ (x>0)$.

139. $r=a^2\cos 2\theta$ (правый листъ).

140. $r=a(1+\cos\theta)$.

141. $x^3+y^3=3axy$ (петля).

142. $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}+\frac{x^2y}{c^3}$ (правый листъ).

143. $\left(\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\right)^3=\frac{x^4y}{c^5}$ (правый листъ).

144. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2,\quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b},\quad 3\frac{x}{a}=\frac{y}{b}.$

145. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{xy}{ab}$ (правый листъ).

Перемѣнить порядокъ интегрированія въ интегралахъ 146—147:

146. $\int_0^a\int_{a^2-x^2}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

147. $\int_0^{2a}\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy\,dx$

Преобразовать двойные интегралы 148—149, вводя новыя перемѣнныя u и v:

148. $\int_0^c\int_{ax}^{bx} f(x,y)\,dy\,dx,\quad u=x+y,\quad uv=y.$

149. $\int_x^a\int_{y=0}^{b} f(x,y)\,dy\,dx,\quad u=y+xx,\quad uv=y.$

Вычисленіе поверхностей.

Въ примѣрахъ 150—183 требуется вычислить часть поверхности $f(x,y,z)=0$, вырѣзаемую поверхностями: $\varphi(x,y)=0$, $\psi(x,y)=0$ и пр. что для краткости обозначено такъ: $f(x,y,z)=0:\varphi(x,y)=0,\ \psi(x,y)=0$ и пр.

150. $x^2 + z^2 = 2ax$; $y^2 = 2px$.

151. $z^2 = 2xy$; $x = a$, $y = b$, $z = 0$.

152. $2pz = x^2$; $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $x = a$ $(\alpha > \beta)$.

153. $z^2 = 2px$; $y^2 = 2qx$, $x = a$.

154. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$ $(a > b)$.

155. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$.

156. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x^2 + by^2 = a^2x$ $(b \geqq a)$.

157. $y^2 + z^2 = x^2$; $x^2 + y^2 = a^2$.

158. $y^2 + z^2 = x^2$; $x^2 = ay$.

159. $y^2 = 4x$; $x^2 + y^2 + z^2 = 5x$.

160. $x^2 + y^2 = ax$; $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

161. $z = c \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $z = 0$.

162. $x^2 + y^2 = 2az$; $x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$ $(c > a)$.

163. $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$; $x^2 + y^2 = 2az$.

164. $2cz = y^2$; $x^2 + 2xy \cot \alpha = x^2 + y^2 = R^2$, $z \geqq 0$.

165. $\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right)^2 + \frac{z}{c} = 1$; $z = 0$.

166. $x^2 + y^2 = 2az$; $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

167. $cz = xy$; $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2xy$, $z \geqq 0$.

168. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

169. $z^2 = x^2 + y^2$; $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ $(z > 0)$.

170. $x^2 + y^2 + z^2 = 2cx$; $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$.

171. $(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + z^2 = a^2$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

172. $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$; $z^2 = 2x^2 + y^2$.

173. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$; $x + z = 2$.

174. $z = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$; $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$.

175. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (полная поверхность).

176. $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

177. $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.

178. $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$; $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

179. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; $x = 0$, $y = 0$, $x + y = R$ $(z > 0)$.

180. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z}{c} = 1$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

181. $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2a^2$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

182. $z^2 = 2xy$; $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$, $z = 0$.

183. $\sin z = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$; $x = 1$, $x = 2$.

Моменты инерціи и центры инерціи поверхностей.

Вычислить моменты инерціи однородныхъ поверхностей (при массѣ поверхности = 1):

184. Поверхности конуса $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2$, отсѣченной плоскостью $z = H$, — относительно оси z.

185. Поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — относительно одного изъ діаметровъ.

186. Поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 2cz$, отсѣченной плоскостью $z = c$, относительно оси z.

187. Поверхности сегмента сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, отсѣченнаго плоскостью $z = H$, — относительно оси z.

Вычислить координаты центра инерціи однородныхъ поверхностей.

188. Поверхности конуса $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2$, отсѣченной плоскостью $z = H$.

189. Поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 2cz$, отсѣченной плоскостью $z = c$.

190. Поверхности сегмента сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, отсѣченнаго плоскостью $z = H$.

191. Той части поверхности $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, которая проектируется на плоскость XOY между прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

192. Вычислить двойной интеграль $\iint \frac{dS}{P}$, распространенный по поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, если dS означаетъ элементъ поверхности, а P — разстояніе отъ центра эллипсоида до касательной плоскости къ этому элементу поверхности.

193. Вычислить двойной интеграль $\iint \frac{dS}{\rho^n}$, распространенный по поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, если dS означаетъ элементъ поверхности, а ρ — разстояніе этого элемента до постоянной точки $(0, 0, c)$ при $c > a$.

в) Тройные интегралы.

Вычисленіе объемовъ.

Вычислить объемы ограниченные слѣдующими поверхностями

194. $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $x^2 + y^2 = z^2 tg^2\alpha$, $x^2 + y^2 = z^2 tg^2\beta$ $(\alpha > \beta)$.

195. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3x$.

196. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz$

197. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = az(x^2 + y^2)$

198. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)$.

199. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$

200. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2y^2z^2$.

201. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3xyz$.

202. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)^2$

203. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2z^4$.

204. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3(x^3 + y^3)$.

205. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3(x^3 + y^3 + z^3)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

206. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3z(x^2 + y^2)$.

207. $(x^2 + y^2 + z^2)^5 = (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)^2$.

208. $(x^2 + y^2)^3 + z^4 = a^3(y - x)$

209. $(x^2 + y^2)^3 + z^4 = az(x^2 + y^2)$

210. $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^4z$.

211. $[(x^2 + y^2)^2 + z^4]^2 = a^3z(x^2 + y^2)^2$.

212. $[(x^2 + y^2)^2 + z^4]^3 = a^6x^2y^2z^2$.

213. $(x^2 + y^2)^3 + z^6 = a^3xyz$

214. $[(x^2 + y^2)^3 + z^6]^2 = a^6(x^2 + y^2)^3$.

215. $(x^2 + y^2)^n + z^{2n} = a^{2n}z^{2n-3}$.

216. $(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + a^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$, $R = a$

217. $(x^2 + y^2 + z^2)^4 - a^2(x^2 + y^2 + z^2)^3 + a^4(x^2 + y^2) = 0$.

218. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3ze^{x^2+y^2+z^2}$.

219. $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2b^2z(x^2 + y^2)}{a^2x^2 + b^2y^2}$.

220. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^8z^2}{x^2 + y^2}$

221. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6}{x^2 + y^2}$

222. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 3\frac{z^2}{c^2}$, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $\frac{x}{a} = \sqrt{3}\cdot\frac{y}{b}$ $(z > 0)$.

223. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x}{h}$.

224. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{h^3}$.

225. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{k^2}$

226. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^3 = \frac{z^2}{h^4}$

227. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\Big)^3 = \frac{x^2z}{h^3}$.

228. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^3 = \frac{x^3}{h^3} - \frac{y^3}{k^3}$.

229. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^3 = \frac{xyz}{h^3}$.

230. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\Big)^4 = \frac{z}{l}\left(\frac{x^4}{h^4} + \frac{y^4}{k^4}\right)$

231. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^5 = \left(\frac{z}{h}\right)^4$

232. $\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = \frac{x}{h}$.

233. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = \frac{z}{k}$

234. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = \frac{y}{k} - \frac{x}{h}$.

235. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = \frac{z}{l}\left(\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}\right)$.

236. $\left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4}\right]^2 = \frac{z^3}{l^3}\left(\frac{x^2}{h} - \frac{y^2}{k^2}\right)$.

237. $\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}\right]^2=\frac{z}{l}\left(\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}\right)^2$

238. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3+\frac{z^6}{c^6}=\frac{xyz}{h^3}$

239. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3+\frac{z^6}{c^6}=\frac{z}{l}\left(\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}\right)$.

240. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=\frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2}$.

241. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\alpha^2\right)^2=4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$, $\alpha^2<1$

242. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\alpha^2\right)^2=4\frac{z^2}{c^2}$, $\alpha^2<1$.

243. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{l}e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}$

244 $x+y+z=a$, $x+y+z=2z$, $x+y=z$, $x+y=2z$, $y=x$, $y=3x$.

245 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{z}{l}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

246. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

247. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

248. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{h}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

249. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\frac{x}{h}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

250 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

251 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\frac{z^2}{h^2}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

252. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\left(\frac{x}{h}+\frac{y}{k}\right)^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

253. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\left(\frac{x}{h}-\frac{y}{k}\right)^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

254. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^6=\frac{xyz}{h^3}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

255. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=\frac{z}{h}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

256. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

257. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

258. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3+\frac{z^3}{c^3}=\frac{z^3}{h^3}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

259 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n+\frac{z^n}{c^n}=\left(\frac{z}{h}\right)^{n-3}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

260 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\sin\left[\frac{\pi\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}\right]$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

261 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=e^{\frac{\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

262 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\log\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

263. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

264. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^6=\frac{h^2}{xy}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

265. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$.

266. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}\right]^3=\frac{z}{h}$.

267. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}\right]^4=\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}$.

268. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}\right]^6=\frac{z}{h}$.

269. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

270. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

271. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}\right)^7=\sqrt{\frac{x}{h}}+\sqrt{\frac{y}{k}}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

272. $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{a}}+\sqrt[3]{\frac{y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{z}{c}}\right)^8=\frac{z}{h}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

273. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

274. $a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1$, $a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2$, $a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3$.

275. $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2=1$, $a_3x+b_3y+c_3z=\pm h$.

276. $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=1$.

277. $|a_1x+b_1y+c_1z|+|a_2x+b_2y+c_2z|+|a_3x+b_3y+c_3z|=1$.

Моменты инерціи и центры инерціи объемовъ.

Вычислить моменты инерціи однородныхъ тѣлъ, ограниченныхъ слѣдующими поверхностями (при массѣ тѣла — M):

278. $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, $z=0$, $z=c$ — относит. оси z.

279. $x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2}z^2$, $z=H$ — относит. оси z.

280. $z^2=2ax$, $z=0$, $x^2+y^2=ax$ — относит. оси z.

281. $x+y+z=a\sqrt{2}$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ — относит. оси z.

282. $x^2+y^2=2z$, $x^2+y^2=z^2$ — относит. прямой $x=0$, $z=4$.

283. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2z$ — относит. оси z.

284. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — относит. оси z.

285. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ — относит. оси z.

286. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$ — относит. оси z.

Вычислить координаты центра инерціи однородныхъ тѣлъ, ограниченныхъ слѣдующими поверхностями

287. $z^2=xy$, $x=a$, $y=b$, $z=0$.

288. $z=c\cdot\frac{a-x}{a}\cdot\frac{b-y}{b}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

289. $x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2}z^2$, $z=H$.

290. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=a(a-2z)$.

291. $x^2+y^2=az$, $z=a$.

292. $x+y+z=a\sqrt{2}$, $z=0$, $x^2+y^2=a^2$.

293. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$.

294. $x^2+y^2=z$, $x+y+z=0$.

295 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = tg^2\,\alpha \cdot z^2 \; (z > 0)$

296 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

297 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$

298. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$.

299. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \; (z > 0)$.

300. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$.

301. $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = -1, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = -1,$

302. $\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$.

303. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$.

ОТДѢЛЪ IX.

Интегрированіе уравненій.

Нахожденіе функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ по полнымъ ихъ дифференціаламъ

1. $dz = (2x\cos y - y^2\sin x)\,dx + (2y\cos x - x^2\sin y)\,dy$

2. $dz = (y - \sin x)\,dx + (x + 1)\,dy.$

3. $dz = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}\,dx + \frac{e^y}{1 + x^2}\,dy.$ 4. $dz = \frac{(x + 2y)\,dx + y\,dy}{(x + y)^2}$

5. $dz = \frac{(3y - x)\,dx + (y - 3x)\,dy}{(x + y)^3}.$

6. $dz = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x\right)dy$

7. Опредѣливъ число n подъ тѣмъ условіемъ, чтобы выраженіе $\frac{(x - y)\,dx + (x + y)\,dy}{(x^2 + y^2)^n}$ было полнымъ дифференціаломъ функціи u, найти эту функцію.

8. Опредѣлить постоянныя a и b такъ, чтобы выраженіе $\frac{(y^2 + 2xy + ax^2)\,dx - (x^2 + 2xy + by^2)\,dy}{(x^2 + y^2)^2}$ было полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи z, которую требуется опредѣлить.

9. $dv = \frac{dx - 3dy}{z} + \frac{3y - x}{z^2}\,dz.$

10. $dv = \frac{x + y + z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\,[(y^2 + z^2 - xy - xz)\,dx + (z^2 + x^2 - yz - yx)\,dy + (x^2 + y^2 - zx - zy)\,dz].$

11. Опредѣлить постоянныя $a, b, c; a', b', c$ такъ, чтобы выраженіе $\frac{(x + y + 2z)\,dx + (ax + by + cz)\,dy + (a'x + b'y + c'z)\,dz}{(x + y + z)^3}$ было полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи, которую требуется найти.

12. Найти условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы можно было найти функціи $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, удовлетворяющія уравненіямъ
$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 = A(x, y),\quad \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 = B(x, y),\quad \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y} = 0,$$
гдѣ $A(x, y)$ и $B(x, y)$ данныя функціи. Доказать, что при выполненіи этихъ условій нахожденіе функцій P и Q приводится къ квадратурамъ.

Уравненія, лѣвая часть которыхъ есть полный дифференціалъ.

13. $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0.$

14. $(x^3 + 3xy^2)\,dx + (y^3 + 3x^2y)\,dy = 0.$

15. $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0.$ 16. $x\,dx + y\,dy + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0.$

17. $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0$ 18. $(1 + e^{\frac{x}{y}})\,dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0.$

19. $\frac{2x\,dx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = 0.$

20. $\left\{\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right\} dx + \left\{\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right\} dy = 0.$

Уравненія съ отдѣляющимися перемѣнными.

21. $\frac{x\,dx}{1+y} - \frac{y\,dy}{1+x} = 0.$

22. $y' \sin x = y \log y.$

23. $(1 + e^x)\,yy' = e^x.$

24. $(a^2 + y^2)\,dx = 2x\sqrt{ax - x^2}\,dy.$

25. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{xy(1 + x^2)}.$

26. $(1 + x^2)\,y^3\,dx + (1 - y^2)\,x^3\,dy = 0.$

27. $y^2\,dx + (xy - 1)\,dy = 0.$

28. $(1 + x)\,y\,dx + (1 - y)\,x\,dy = 0.$

29. $(1 + xy)\,y\,dx + (1 - xy)\,x\,dy = 0.$

30. $(y - x)\sqrt{1 + x^2}\,dy = (1 + y^2)^{3/2}\,dx$ Положить $x = tg\,v$; $y = tg\,u$.

Уравненія линейныя и приводящіяся къ линейнымъ.

31. $xy' - y + \frac{x^2}{(x-1)^2} = 0.$

32. $y' - 3x^2y = x^5 + x^2.$

33. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

34. $y' = \frac{y}{\sin x} - tg\frac{x}{2}.$

35. $y' + ay = e^{mx}.$

36. $y' = \frac{ny}{x+1} - e^x(x+1)^n.$

37. $y' + y\cos x = \sin x\cos x.$

38. $y' + \frac{y}{x} = 2\log x + 1.$

39. $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}\,y = 1.$

40. $x(1 - x^2)\,y' + (2x^2 - 1)\,y = ax^2$

41. $3y^2y' = ay^3 - x + 1.$

42. $xy' = x^4e^{-y} - 2.$

43. $y' = 1 - e^{x+2y}.$

44. $xy' + 1 = e^y$

45. $\frac{dy}{dx} + tg\,y = \frac{x}{\cos y}.$

46. $y\,dx + (y^2 - 2x)\,dy = 0.$

47. $dx + (x + y^2)\,dy = 0.$

48. $2y\,dx + (y^2 - 6x)\,dy = 0.$

49. $xy\,dx - (x^2 + y^4)\,dy = 0$

50. $(x^2 + y^2 + 2x - 2y)\,dx + 2(y - 1)\,dy = 0.$

51. $(x^2 + y^2 + 1)\,dy + xy\,dx = 0.$

52. Найти интегралъ уравненія $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 1$, удовлетворяющій условію $y = 1$ при $x = 0$.

53. Найти интегралъ уравненія $y' = \frac{1 + 3x^2}{x(1 + x^2)}\,y - x\frac{1 - x^2}{1 - x^2}$, удовлетворяющій условію $y = 0$ при $x = 1$.

54. Найти интегральную кривую уравненія $y' + x^2y = x^2$, проходящую черезъ точку M (2, 1)

55. Доказать, что интегральныя кривыя, соотвѣтствующія дифференц. уравненію $x(x - a)\,y' + (x + a)\,y + b^2 = 0$, суть гиперболы, одна изъ асимптотъ которыхъ постоянна, а другая проходитъ черезъ постоянную точку

---

56. $(1 - x^2)\,y' = xy + axy^2.$

57. $xy^2(xy' + y) = a^2.$

58. $y^{n-1}(ay' + y) = x.$

59. $xy' + y = y^2\log x.$

60. $dy + (xy - xy^3)\,dx = 0.$

61. $y' = \frac{1}{3}\,y\sin x + y^4\sin x = 0.$

62. $y' = 9x^2y + (x^2 + x^2)\sqrt[3]{y^2}$

63. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^3 x}$

64. $y' + 2xy = 2x^3y^3$

65. $y' + \frac{xy}{1 - x^2} = xy^{3/2}.$

66. $y\,dy - \frac{ay^2}{x^2}\,dx = \frac{b\,dx}{x^3}$

67. $(xy + x^2y^3)\,y' = 1.$

68. $2y + y^2 + \frac{1}{x^2} = 0.$ Положить $xy = z$

69. $x^2\frac{dy}{dx} + xy - x^2y^2 + 1 = 0.$ Положить $xy = z.$

70. $\frac{dy}{dx} + \sin y + x\cos y + x = 0.$ Положить $tg\frac{y}{2} = z.$

71. $\frac{dy}{dx} + \frac{\sin y}{x} + x\cos y - x = 0$ (см. № 70).

72. Опредѣлить функцію $\varphi(x)$ изъ условія $\int_0^1 \varphi(\alpha x)\,d\alpha = n\varphi(x).$

73. Опредѣлить y, какъ функцію x, по условію $\frac{ax}{a+x}\int_0^x y\,dx = \int_0^x xy\,dx$

74. $\int_0^x xy\,dx = x^2 + y.$

75. $\int_a^x y\sqrt{1+y'^2}\,dx = x + \frac{1}{2}y^2.$

76. $\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\sqrt{x} + y$

Уравненія однородныя и приводящіяся къ однороднымъ.

77. $(8y + 10x)\,dx + (5y + 7x)\,dy = 0$

78. $(x + y)\,dx + (y - x)\,dy = 0.$

79. $(y^2 - 3x^2)\,dy + 2xy\,dx = 0.$

80. $(x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (y^2 + 2xy - x^2)\,dy = 0.$

81. $(x^2 + 2y)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$

82. $x\,dy = y\,dx - y\,dy.$

83. $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}.$

84. $(x - xy - y^2)\,dx + y^2dy = 0.$

85. $y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0.$

86. $(x^2 + xy + y^2)\,dx = x^2\,dy.$

87. $(3x^2 + 6xy + 3y^2)\,dx + (2x^2 + 3xy)\,dy = 0.$

36. $y = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$

89. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$

90. $x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{x^2 + y^2}.$

91. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}.$

92. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx - x\,dy = 0.$

93. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0.$

94. $\frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\frac{dy}{y} = 0.$

95. $x\,dy - y\,dx = y\log\left(\frac{y}{x}\right)dx$

96. $xy\,dy - [y^2 + (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}}]\,dx = 0.$

97. $xy' = y\log\frac{y}{x}.$

98. Найти интегральныя кривыя, проходящія черезъ точку $M(1,1)$, для уравненія $3y - 2x - 2(yx - x^2)^{\frac{1}{2}} = xy'.$

99. $y = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$

100. $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0$

101. $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0$

102. $(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0.$

103. $\frac{dy}{dx} = ax + by + c$

104. $\frac{dy}{dx} = (ax + by + c)^2.$

105. $y'^2 = ax + by + c.$

106. $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{(x + y)^2}.$

107 $y' = (x - y)^2 + 1.$

108. Доказать, что уравненіе вида $x^2y' = y^2 f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$ всегда можетъ быть проинтегрировано.

---

109. $y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}.$ **110.** $y' = \left(y - \frac{1}{4x}\right)^2$

111. $y' = y^2 + \frac{1}{4x^2}.$ **112.** $y' + \frac{1}{4}y^2 = x^2.$

113. $(y + y\sqrt{x^2y^4 - 1})\,dx + 2x\,dy = 0.$

Уравненія Дарбу и Якоби.

114. $x\,dx + y\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0$

115. $(x + 3y)\,dx + 2y\,dy + a(x + y)(x\,dy - y\,dx) = 0.$

116 $y^2\,dx + x^2\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0.$ **117.** $y^2\,dx + xy\,dy + x^2y(x\,dy - y\,dx) = 0.$

118. $y(x^2 + y^2)\,dx + x(x\,dy - y\,dx) = 0.$ **119.** $(y - x)\,dy + y\,dx = x\,dx\,\frac{x}{y}.$

120. $(x^2y^2 + 1)\,y\,dx + (x^2y^2 - 1)\,x\,dy = 0.$

121. $(x^2 + xy - ay)\,dx + ax\,dy = 0.$ **122.** $(x^2 + y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0.$

123. $(y + 3x^2y)\,dx - (x + x^3)\,dy = 0.$ **124.** $y^2(x + a)\,dx + x(x^2 - ay)\,dy = 0.$

125. $(14x + 13y + 6)\,dx + (4x + 5y + 3)\,dy + (7x + 3y)(y\,dx - x\,dy) = 0$

126 $(7x + 8y + 5)\,dx - (7x + 8y)\,dy + 5(x - y)(y\,dx - x\,dy) = 0.$

127 $(2 + x + y)(x\,dy - y\,dx) - (c + x - y)\,dy + (c + x + 3y)\,dx = 0.$

128. $(y - x - 1)(dx + dy) + (x + y + 1)(x\,dy - y\,dx) = 0.$

Интегрирующій множитель.

Интегрировать уравненія, имѣющія множитель вида $\mu = f(x)$.

129. $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0.$ **130.** $(x^2 + y^2)(x\,dy - y\,dx) = (a + x)\,x^4\,dx.$

131. $(1 - x^3y)\,dx + x^2(y - x)\,dy = 0.$

132 $\{x^3(1 + \log x) + 2y\}\,dx + (3x^3y^2 - x)\,dy = 0.$

133. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0.$ **134.** $(x + y)(1 - xy)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0.$

135 $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0.$

Интегрировать уравненія, имѣющія множитель вида $\mu = f(y)$.

136 $(xy^2 + y)\,dx - x\,dy = 0.$ **137.** $(2xy^2 - y)\,dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0.$

138. $y\cos^2 y(1 - y\sin x)\,dx + (y^2 + x\cos^2 y)\,dy = 0.$

Интегрировать уравненія, имѣющія множитель одной изъ двухъ формъ: $\mu = f(x + y)$ или $\mu = f(xy)$.

139 $(2x^3 + 3x^2y + y^3 - y^3)\,dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)\,dy = 0.$

140 $(x^2 + x^2y + 2xy - y - y^3)\,dx + (y^2 + xy^2 + 2xy - x^2 - x^3)\,dy = 0.$

141. $(2x^2y^2 - y)\,dx + (2xy^3 - x)\,dy = 0.$

142. $(x^2y^2 + xy)\,y\,dx + (x^2y^2 - 1)\,x\,dy = 0.$

143 $x^2y^2 + y + (x^3y^2 - x)\,y = 0.$

---

144 $(x^2 + y^2 + 1)\,dx - 2xy\,dy = 0.$ Уравненіе имѣетъ множитель вида $\mu = f(x^2 - y^2)$.

145. $(y + x^2 + y^2)\,dy + (x - xy)\,dx = 0$ Уравненіе имѣетъ множитель вида $\mu = f(x^2 + y^2)$.

146. $\omega_1(x^2 + y^2)\,x\,dx + \omega_1(x^2 + y^2 - y)\,dy = 0.$

147. $3y^2 - x + (2y^3 - 6xy)\,y' = 0$ Уравненіе имѣетъ множитель вида $\mu = \psi(x + y^2)$.

148 $(y - 3x^2y^2 - 2x^3)\,dx + (2y^3 + 3x^3y^2 - x)\,dy = 0.$ Уравненіе имѣетъ множитель вида $\mu = f(x^3 + y)$

Уравненіе Эйлера.

149. Найти общій алгебраическій интегралъ уравненія $\frac{dx}{a + 2bx + cx^2} + \frac{dy}{a + 2by + cy^2} = 0.$

150. Найти общій алгебраическій интегралъ уравненія $\frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{dy}{a+2by+cy^2}$.

151. Найти общій алгебраическій интегралъ уравненія $\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{dy}{\sqrt{a+by+cy^2}} = 0$.

152. Найти общій интегралъ дифференціальнаго уравненія $\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{dy}{y\sqrt{a+by+cy^2}}$.

153. Доказать, что общій интегралъ уравненія $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0$ можетъ быть представленъ въ формѣ $\frac{y\sqrt{1-x^4}+x\sqrt{1-y^4}}{1+x^2y^2} = C$.

154. Если перемѣнныя x и y удовлетворяютъ уравненію $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0$ и начальному условію $y=1$ при $x=0$, то $x^2y^2+x^2+y^2-1=0$.

155. Доказать, что общій алгебраическій интегралъ ур-нія $\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}} + \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\lambda y)}} = 0$ можетъ быть представленъ въ видѣ $\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)} + \sqrt{y(1-y)(1-\lambda y)} = C(1-\lambda xy)$.

156. Доказать, что общій интегралъ уравненія Эйлера $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$, гдѣ $X = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, $Y = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4$, представляется въ формѣ $\frac{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}{x-y} = \sqrt{C + D(x+y) + E(x+y)^2}$.

157. Доказать, что общій интегралъ уравненія $\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} + \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos\theta'}} = 0$ можетъ быть представленъ въ формѣ $\sqrt{\cos\theta} - \sqrt{\cos\theta'} = C\sin\frac{\theta-\theta'}{2}$.

158. На квадрантѣ лемнискаты $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ разсматриваются точки M и M', обладающія тѣмъ свойствомъ, что дуги OM (гдѣ O—двойная точка лемнискаты) и AM (гдѣ A точка лемнискаты, лежащая на полярной оси) равны. Какимъ уравненіемъ связаны соотвѣтствующіе имъ полярные углы?

Уравненія 1-го порядка, не рѣшенныя относительно y'.

159. $yy' + y'^2 = x^2 + xy$.

160. $x^2y'^2 - 2xyy' + y^2 - x^2y^2 - x^4 = 0$.

161. $4x^2 - a^2 - y'^2 - 4xyy' + y^2 - a^2 = 0$.

162. $y'^3 - (x^2 + xy + y^2)\,y'^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)\,y' - x^3y^3 = 0$.

163. $\left\{1 - \frac{y^2}{x^2}(x^2+y^2)^2\right\} y'^2 - \frac{2yy'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$

164. $y^2 - 2xyy' + (1+x^2)\,y'^2 = 1$.

165. $y(1+x^2) + \frac{x^4}{16} - \left(x + \frac{x^3}{2}\right)y' - y'^2 = 0$.

---

166. $(xy' - y)^2 - 2xy(1+y') = 0$.

167. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.

168. $xy'^2 + 2yy' - x = 0$.

169. $x^2y'^2 + 3xyy' + 3y^2 = 0$.

170. $(xy' - y)(xy' - 2y) + x^2 = 0$.

171. $yy' + kx = \sqrt{y^2 + kx^2}\sqrt{1+y'^2}$.

---

172. $y'^3 - 3y' + 1 = 0.$
173. $y' = e^{y'} \sin y'.$
174. $y = y'^2 + 2y'^3.$
175. $y^2 (y' - 1) = (2 - y')^2$
176. $y = a \sqrt{1 + y'^2}.$
177. $y \sqrt{1 + y'^2} = y.$
178. $y = y' \log y'.$
179. $y'^3 + 3y'^2 + y^2 - 4 = 0.$
180. $y'^3 - 3y'^2 - 9y^4 - 12y^2 = 0.$ *Указаніе.* выразить y и y' раціональными функціями одного параметра.

---

181. $xy' = \sqrt{1 + y'^2}.$
182. $x (1 + y'^2) = 1.$
183. $x (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = a.$
184. $x = ay + by'^2.$
185. $x = y'^2 + 1.$
186. $xy'^3 = 1 + y'.$
187. $x = \dfrac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$
188. $y'^2 - 2xy' - 1 = 0.$
189. $x^3 + y^2 = x^2.$
190. $x^3 + y'^3 = axy'.$
191. $(1 - x) y'^2 + 2y (x - 1) - x = 0.$
192. $(a^2 - x^2) y'^3 + bx (a^2 - x^2) y'^2 - y' - bx = 0$
193. $x (y' + 2)^2 = y'^2 + 4y' + 3.$

---

194. $y = xy' + x \sqrt{1 + y'^2}.$
195. $y = xy' + y' - y'^2$
196. $y = 2xy' + y^2 y'^3.$
197. $4y^3 - 6y'^2 + 9 (y - x) = 0.$
169. $(xy' + y)^2 = y^2 y'.$
199. $2y (y' + 2) = xy'^2 - 0.$
200. $ayy'^2 + (2x - b) y' - y = 0.$
201. $2yy' = x (y'^2 + 4).$
202. $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}.$
203. $y = xy'^2 + y'^2.$
204. $y \sqrt{1 + y'^2} = a (x + yy').$
205. $y = 2xy' - y'^2.$
206. $y = x (1 + y') + y'^2.$
207. $y = yy'^2 + 2xy'.$
208. $y = xy' + y'^2.$
209. $y = xy' - a \sqrt{1 + y'^2}.$
210. $yy' = 2xy'^2 + 1.$
211. $y = xy' - ax \sqrt{1 + y'^2}.$
212. $y = 2xy' + \sqrt{1 + y'^2}.$
213. $y = x + xy' + xy'^2.$
214. $y (y^2 + 1) = x + yy'.$
215. $x + yy' = \dfrac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$
216. $(xy' - y) (xy' - 2y) + x^3 = 0.$
217. $x (1 + y'^2) (y - xy') = 2a^2.$
218. $y' = m \log x + \log (xy' - y).$
219. $x^2 (y - xy') = yy'^2.$

---

220. $2y = x^2 + xy' + y'^2.$
221. $2y = 2x^2 + 4xy' + y'^2.$
222. $4y = (x + y')^2.$
223. $y'^2 = x^2 + 3y$
224. $4y = x^2 + y'^2.$

Найти особенныя рѣшенія слѣдующихъ уравненій.

225. $y = xy' + y' - y'^2$
226. $(xy' - y)^2 = x^3 (2y - xy').$
227. $(xy' + y)^2 + 3x^3 (xy' - 2y) = 0.$
228. $2xy (1 + y'^2) = (xy' + y)^2 = 0.$
229. $x^2 y'^2 - 2 (xy - 2) y' + y^2 = 0.$
230. $(y - xy') (ay' - b) = aby'.$
231. $y'^3 - xyy' + \dfrac{2x^4}{729} = 0.$
232. $y'^2 - yy' + e^x = 0.$
233. $y = xy' + \sqrt{a^2 - b^2 y'^2}.$
234. $y'^2 - 2x \sqrt{y} y' + 4y \sqrt{y} = 0.$
235. $x y^2 y'^2 - y^3 y' + a^2 x = 0.$
236. $y'^2 + \left(x + \dfrac{x^3}{2}\right) y' - (1 + x^2) y - \dfrac{x^4}{16} = 0.$

Уравненія высшихъ порядковъ, допускающія пониженіе порядка.

237. $y'' = x + \sin x.$
238. $y''' \sin^4 x = \sin 2x.$
239. $(1 + x^2) y'' + y'^2 + 1 = 0.$
240. $xy'' = y' \log \dfrac{y'}{x}.$
241. $1 + y'^2 + xy'y'' = ay'' \sqrt{1 + y'^2}.$
242. $(y'')^2 = y'.$

243. $y' + \frac{1}{4} y''^2 = xy''$.

244. $ay'' + (1 + y'^2)^{3/2} = 0$.

245. $y'' = (1 + y'^2)^{3/2}$.

246. $y'(1 + y'^2) = ay''$.

247. $ay''' = y''$.

248. $y''' = (y'')^3$.

249. $y'' + y''^2 = 0$.

250. $y'y'' = 3y''^2$.

251. $y''(1 + y'^2) = 3y'y''^2$.

252. $y'^2 + 2yy'' = 0$.

253. $y'' = \frac{a}{(b - y)^2}$.

254. $2(2a - y)y'' = 1 + y'^2$.

255. $y'' = ae^y$.

256. $yy''^2 = 1$.

257. $yy'' = y'^2$.

258. $yy'' + y'^2 = 1$.

259. $2yy'' = 3y'^2 - 4y^2$.

260. $1 + y'^2 = 2ay''$.

261. $(y^2 + y'^2)^{3/2} = y(y^2 + 2y'^2 - yy'')$.

262. $y^4 - y^3 y'' = 1$.

263. $2yy' + y'^2 + y'^4 = 0$.

264. $y(1 + \log y)y'' + (1 + \log y)y'^2 = 0$.

265. $yy'' = y'y^2$.

266. $2y'^2 = (y - 1)y''$.

267. $y''(1 + yy'') = y'(1 + y'^2)$.

268. $yy''y = y'^2 + y'^4$.

269. Найти интегралъ уравненія $y^3 y'' + 1 = 0$, удовлетворяющій начальнымъ условіямъ: $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 1$.

270. $y'^2 - 2xy'' + x^2 - y^2 = 0$.

271. $x^4 y'' = (xy' - y)^3$.

272. $x^3 y'' = (y - xy')^2$.

273. $yy'' + y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1 + x^2}}$.

274. $x^3 y'' = (x^3 + 2xy)y' - 4y^2$.

275. $x^2 yy'' = 2x^2 y'^2 + xyy' + y^2 = 0$.

276. $x^2 yy'' = (y - xy')^2$.

277. $x^2 yy'' = (y'^2 + xyy' - y\sqrt{x^2 y'^2 + y^2})$.

278. $(x^2 + y^2)y'' = yy'^2 + xy'^3 + xy' - y = 0$.

279. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$.

280. $(x^2 + y^2 + a^2)y'' + (y - xy')(1 + y'^2) = 0$.

281. Найти функцію вида $z = \varphi(x^2 + y^2)$, удовлетворяющую уравненію

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0.$$

282. Найти рѣшеніе уравненія

$$\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

имѣющее видъ $z = \varphi(x^2 + y^2)$.

Линейныя уравненія высшихъ порядковъ.

283. $xy'' + y' = 0$.

284. $(1 + x^2)y'' - 2xy = 0$.

285. $2xy'' = y' - ax$.

286. $xy'' + y' = 3x + 1$.

287. $y'' - 13y' + 12y = 0$.

288. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 1 + x + x^2$.

289. $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$.

290. $y'' - 4y' + 5y = 2y - 2x + 3$.

291. $y'' + a^2 y = e^x$.

292. $y^{IV} - 4y''' + 8y'' - 16y' + 16y = 96xe^{2x}$.

293. $y^{IV} - 2y'' + 2y' - y = 48xe^x$.

294. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 12x^2 e^{3x} - e^{2x}$.

295. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

296. $y^{IV} + 2a^2 y'' + a^4 y = 8\cos ax$.

297. $y^{IV} - a^4 y = 5a^4 e^{ax} \sin ax$.

298. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} \cos x$.

299. $y'' - 2y' + y = e^{-x} \sin x + 4e^x$.

300. $y'' + y = \sin x \sin 2x$.

691. $y^{IV} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y = x\cos 2x$.

302. $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \frac{1}{\sqrt{(\cos 2x)^3}}$.

303. $\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{n}{1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + y = 0$.

[illegible] $\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{dy}{dx} + y = 0$

[illegible] $\frac{d^n y}{dx^n} - y = 0.$

306. Найти интегральную кривую уравнения $y'' + k^2 y = 0$, проходящую через точку $M(x_0, y_0)$ и касающуюся въ этой точкѣ прямой $y = ax$

307 Найти интегральную кривую уравнения $y'' + k^2 y = 0$, проходящую черезъ точку $M(x_0, y_0)$ и касающуюся въ этой точкѣ прямой $y = ax$

308. Найти рѣшение уравнения $y^{IV} - 2y'' + 2y' - 2y' + y = \frac{5}{2} + 4\cos x$, удовлетворяющее условиямъ $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$, $y = 0$, $y = 0$ при $x = \pi$

---

309 $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$. Частное рѣшение $y = \frac{\sin x}{x}$

310 $x(2 - x) y'' + (x^2 - 2) y' + 2(1 - x) y = 0$ Частное рѣшение $y = x^2$.

311. $x^2 (\log x - 1) y'' - xy' + y = 0$ Частное рѣшение $y = x$

312 $xy'' - (1 + x) y' + y = 0$ Частное рѣшение $y = 1 + x$

313 $y'' + (\operatorname{tg} x - 2\cot x) y' + 2\cot^2 x \cdot y = 0$. Частное рѣшение $y = \sin x$

---

314. $y'' - 4nxy' + (4n^2 x^2 - 2n) y = 0$. Уравнение имѣетъ частное рѣшение вида $y = e^{nx^2}$.

315. Интегрировать уравнение $(2x + 1) y'' + (4x - 2) y' - 8y = 0$, имѣющее частное рѣшение вида $y = e^{mx}$, гдѣ m постоянное

316 Интегрировать уравнение $(1 - x^2) y'' - xy' + 9y = 0$, допускающее частное рѣшение въ видѣ полинома.

317. Интегрировать уравнение $xy'' - (x + 5) y' + 3y = 0$ которому можно удовлетворить, взявъ за y полиномъ.

318. Интегрировать уравнение $(x^2 - 1) y'' - 6y$, которому можно удовлетворить, взявъ за y полиномъ

319. Интегрировать уравнение $(1 - x^2) y'' - 2xy' + 6y = 0$, которому можно удовлетворить, взявъ за y полиномъ.

320. Интегрировать уравнение $y'' - 2xy' + 4y = 0$, допускающее частное рѣшение въ видѣ полинома

321. Интегрировать уравнение $xy'' + (1 - x) y' + 2y = 0$, которому можно удовлетворить, взявъ за y полиномъ.

322. Интегрировать уравнение $(1 + x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + 6x \frac{dy}{dx} + 6y = 0$, имѣющее частное рѣшение вида $y = \frac{P(x)}{(1 + x^2)^k}$, гдѣ $P(x)$ полиномъ, а k цѣлое число

323. Интегрировать уравнение $(x^2 - x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (2x - 3) \frac{dy}{dx} - 2y = 0$, зная, что его общій интегралъ рациональная функція

324. Интегрировать уравнение $x(x - 1) y'' + (x + 1) y' - y = 0$, коего общій интегралъ рациональная функція

325. Интегрировать уравнение $x(x - 1) y'' + (4x - 2) y' + 2y = 0$, коего общій интегралъ есть рациональная функція.

326 Интегрировать уравнение $x(x + 1)(x + 1) y'' - 2x(x^2 + 3x + 1) y' + (6x + 2) y = 0$, коего общій интегралъ рациональная функція.

---

327. $y'' + \frac{2x}{1 + x^2} y' + \frac{y}{(1 + x^2)^2} = 0$. Ввести новое независимое перемѣнное t подъ условіемъ $x = \operatorname{tg} t$

328. $xy'' + \frac{1}{2} y' - y = 0$. Положить $x = t^2$.

329 $y'' - y'(1 + 2e^x) + ye^{2x} = 0$. Положить $x = \log t$.

330. $y'' - y' + ye^{2x} = 0$. Ввести новое независимое перемѣнное t подъ условіемъ $x = \log t$.

331. $x^4y' + 2x^3y' + n^2y = 0$. Положить $x = \frac{1}{t}$.

332. $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$. **333.** $y = 4y\frac{\sin 3x}{\sin^3 x}$.

334. $a(1 - x)^2y'' = 2y$.

335. Доказать, что интегрированіе уравненія $\frac{d^3y}{dx^3} = P\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y\right) + Q$, гдѣ P и Q данныя функціи отъ x, можетъ быть приведено къ квадратурамъ.

Уравненія Эйлера.

336. $x^2y'' = 2y'$. **337.** $x^3y''' + x^2y'' - xy' + y = 0$.

338. $x^4\frac{d^4y}{dx^4} - y = 0$. **339.** $x^3y''' + xy' + y = x$.

340. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$. **341.** $x^2y'' - 2xy' + 2y + x = 2x^3 = 0$.

342. $x^3y''' = x^2y'' + 2xy' - 2y = x + 3x$.

343. $(3x + 2)^3y''' + 7(3x + 2)y' + 63x = 18$.

344. $x^2y'' = 4xy' + 6y - ax + \frac{b}{x}$. **345.** $xy^{IV} + 6x^3y''' + 5x^2y'' - xy' + y = x^2$.

346. $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' - 6\log x$. **347.** $x^3y''' - x^2y'' - 3xy' + 16\log x = 0$.

348. $(x + 1)^2y'' + (x + 1)y' + y = 2\sin\log\frac{1}{1 + x}$.

Системы дифференціальныхъ уравненій.

349. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dp}{q} = \frac{dq}{p}$. **350.** $\frac{dx}{x^2 + 3xy^2} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2yz}$.

351. $(z - y)^2\frac{dy}{dx} = z$; $(z - y)^2\frac{dz}{dx} = y$. **352.** $\frac{dx}{y + z} = \frac{dy}{y + x} = \frac{dz}{z + y}$.

353. $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{z}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$. **354.** $\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{y - x}$.

355. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

356. $\frac{dx}{y(x + y)} = \frac{dy}{(x - y)(2x + 2y + z)} = \frac{dz}{x(x + y + z)}$.

357. $\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$.

358. $\frac{dx}{dt} = \frac{x - y}{z - t}$; $\frac{dy}{dt} = \frac{x - y}{z - t}$; $\frac{dz}{dt} = x - y + 1$.

359. Интегрировать систему $\frac{dx}{x^2 - y^2 - yz} = \frac{dy}{xy - yz} = \frac{dz}{xz + xy}$ при начальныхъ условіяхъ: $z = -1$, $y = 1$ при $x = 0$.

360. Интегрировать систему $x\frac{dy}{ds} = y\frac{dx}{ds} + \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + 1$. Положить $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$; $\frac{dy}{ds} = \sin\alpha$.

361. $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2$; $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 = b^2$.

362. $\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0$; $\frac{dz}{dx} - y + z = 0$. **363.** $\frac{dx}{dt} + 7x - y = 0$; $\frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0$.

364. $\frac{dx}{dt} = z + y - x$; $\frac{dy}{dt} = z + x - y$; $\frac{dz}{dt} = x + y + z$.

$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = x.$

367. $\frac{dx}{dt} + y - z = 0, \quad \frac{dy}{dt} - z = 0, \quad \frac{dz}{dt} + x - z = 0.$

368. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x}$

369. $\frac{dx}{dt} = y - z, \quad \frac{dy}{dt} = z - 2x, \quad \frac{dz}{dt} = 2x - y$

370. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2m^2y = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 2m^2x = 0$

371. Интегрировать систему $\frac{d^2x}{dt^2} = 3c^2y - x, \quad 3c^2z, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -c^2(y - x); \quad \frac{d^2z}{dt^2} = c^2z$ при начальныхъ условіяхъ. $x = 0, \frac{dx}{dt} = 0, y = a, \frac{dy}{dt} = 0; z = b, \frac{dz}{dt} = 0$ при $t = 0$.

372. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3y - 4z + 3 = 0, \quad \frac{d^2z}{dx^2} + y + z + 5 = 0.$

373. $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}.$

374. $\frac{dx}{dt} + 5x - 2y = e^t, \quad \frac{dy}{dt} - x + 6y = e^{2t}.$

375. $y' = 3x - y; \quad z' = z + y + e^{ax}.$

376. $\frac{dx}{dt} = 2x - 4y - \cos t, \quad \frac{dy}{dt} + x + 2y = \sin t.$

377. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2} - z = e^x, \quad \frac{dy}{dx} + 2y - \frac{dz}{dx} + z = e^{-x}.$

378. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2} - z = e^x, \quad \frac{dy}{dx} + 2y + \frac{dz}{dx} + z = e^{-x}.$

379. $\frac{dy}{dx} - y + z = \frac{3}{2}x^2; \quad \frac{dz}{dx} + 4y + 2z = 1 + 4x.$

380. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2a\frac{dz}{dx} - a^2y + 2a^2z = b, \quad \frac{d^2z}{dx^2} + 2a\frac{dy}{dx} + 2a^2y - a^2z = cx.$

381. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dz}{dx} + y + z = x + 1; \quad x^2\frac{d^2z}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y - z = x - 1$

382. $\frac{dx}{dt} + n^2y = \cos nt, \quad \frac{dy}{dt} + n^2x = \sin nt$

383. $\frac{dy}{dx} + \frac{z}{x^2} = 1, \quad \frac{dz}{dx} + y = x$ **384.** $\frac{dy}{dx} + z = 1, \quad \frac{dz}{dx} + \frac{2y}{x^2} = \log x.$

385. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + tx = 0, \quad \frac{dy}{dt} + \frac{2y}{t} - \frac{dx}{dt} = 0$

386. $t\frac{dx}{dt} + t = 2x, \quad t\frac{dy}{dt} = t(x + y) + 2x - t.$

387. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{8}{9}(x - 3\cos t(x\cos t + y\sin t)) = 0;$

$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{8}{9}(y - 3\sin t(x\cos t + y\sin t)) = 0.$ (Liouville).

Положить: $x\cos t + y\sin t = u; \quad x\sin t - y\cos t = v.$

388. Доказать, что интегрированіе системы уравненій

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X + Tx, \\ \frac{dy}{dt} &= Y + Ty, \\ \frac{dz}{dt} &= Z + Tz, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} X &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ Y &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ Z &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3, \\ T &= ax + by + cz + d, \end{aligned}$$

сводится при помощи подстановокъ: $x = \frac{u}{\tau}, y = \frac{v}{\tau}, z = \frac{w}{\tau}$ къ интегрированію линейной системы:

$\frac{du}{dt} = a_1u + b_1v + c_1w + d_1\tau$; $\frac{dv}{dt} = a_2u + b_2v + c_2w + d_2\tau$; $\frac{dw}{dt} = a_3u + b_3v + c_3w + d_3\tau$; $\frac{d\tau}{dt} = -(au + bv + cw + d\tau)$. (Hesse).

389. Интегрировать систему: $\frac{dx}{dt} = y + xz$; $\frac{dy}{dt} = x + yz$; $\frac{dz}{dt} = x + z^2$. См. № 388.

390. $\frac{dx}{dt} = x + x(x + y)$; $\frac{dy}{dt} = z + y(x + y)$, $\frac{dz}{dt} = y + z(x + y)$. См. № 388.

Линейныя уравненія перваго порядка съ частными производными.

Найти общій интегралъ уравненій

391. $\cos y \frac{\partial z}{\partial x} + \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cos y$.

392. $xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + z(1 + x^2) = 0$.

393. $xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = xy$

394. $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

395. $x \frac{\partial z}{\partial x} + (y - \sqrt{R^2 - z^2}) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

396. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$

397. $y^3 \frac{\partial z}{\partial y} - xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} = axz$

398. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \sqrt{a^2 - z^2}$.

399. $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{xy}$

400. $(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + z^2$

401. $xz^4 \frac{\partial z}{\partial x} + yz^4 \frac{\partial z}{\partial y} = z^3 y$.

402. $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = a(x + y + z^2)$.

403. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

404. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.

405. $(y^2 + z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + 2xz = 0$

406. $(xy^3 - 2x^4) \frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3y) \frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3)$.

407. $(x^3 + 3xy^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial z}{\partial y} - 2y^2 z = 0$.

408. $(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$.

409. $(y + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - z) \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

410. $(x + y)\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

411. $(z + y - x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$

412. $(z + e^x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y) \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - e^{x+y}$.

413. $x \frac{\partial u}{\partial x} + (z + u) \frac{\partial u}{\partial y} + (y + u) \frac{\partial u}{\partial z} = y + z$

414. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xy$

415. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = x + y + z$

416. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = x^2 + 2u$.

417. $xy \frac{\partial u}{\partial x} - \sqrt{1 - y^2}\left(x \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) = axy \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

418. $(y + z + u) \frac{\partial u}{\partial x} + (x + z + u) \frac{\partial u}{\partial y} + (x + y + u) \frac{\partial u}{\partial z} = x + y + z$.

419. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0$ и проходящую через кривую $z = h$, $xy = c^2$.

420. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $xy\frac{\partial z}{\partial x} = y^2\frac{\partial z}{\partial y} = x$ и проходящую через кривую $x = a$; $yz = \frac{a^2 + 2}{2a}$.

421. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $(x^2 + y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$ и проходящую через кривую $x = a$, $y^2 + z^2 = a^2$.

422. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = y\frac{x}{z}$ и проходящую через кривую $x = 1$; $z = y^3$.

423. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $2xz\frac{\partial z}{\partial x} + 2yz\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2$ и проходящую через кривую $x + y + z = 0$; $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

424. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $tg\,x\frac{\partial z}{\partial x} + tg\,y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\cos y}$ и проходящую через кривую $y = 2x$, $z = tg^3 x$.

425. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $x(x^2 + y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z\right) = 0$ и проходящую через кривую $z = c$, $x^2 + y^2 = R^2$.

Геометрическія приложенія дифференціальныхъ уравненій.

426. Найти кривую, для которой радіусъ векторъ равенъ длинѣ касательной между точкой касанія и осью OX.

427. Найти кривыя, обладающія тѣмъ свойствомъ, что треугольникъ, образованный осью OX, касательной и радіусомъ векторомъ, проведеннымъ изъ начала въ точку касанія, равнобедренный.

428. Дана система прямоугольныхъ осей XOY и точка A на оси ординатъ. Найти такую кривую, что если провести въ точкѣ M ея касательную, то послѣдняя пересѣчетъ ось абсциссъ въ точкѣ T, равноудаленной отъ точекъ M и A. $OA = a$.

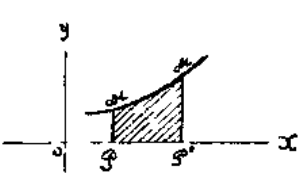
429. Найти кривую подъ тѣмъ условіемъ, что разстоянія AN и AT постоянной точки A до ея нормали и до касательной въ любой точкѣ кривой находятся въ постоянномъ отношеніи $= k$.

430. Найти кривую, для которой сумма длинъ нормали и поднормали есть величина постоянная.

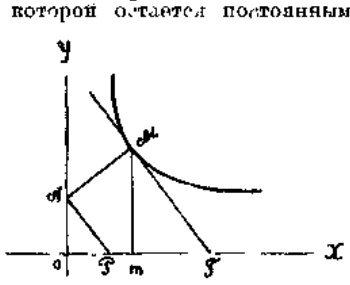
431. Найти кривую, для которой сумма длинъ касательной и подкасательной пропорціональна произведенію координатъ точки касанія.

432. Найти кривую такого рода, чтобы площадь $MM'P'P$, ограниченная кривою MM', ординатами MP и $M'P'$ и осью OX была пропорціональна дугѣ MM', какъ бы ни были выбраны точки M и M' (черт. 43).

433. Найти кривую, для которой остается постояннымъ отношеніе подкасательной mT къ отрѣзку OP отсѣкаемому на оси OX прямой, проведенной черезъ точку N пересѣченія оси OY съ нормалью параллельно касательной (черт. 44).



Черт. 43.



Черт. 44.

434. Касательная и нормаль кривой въ любой точкѣ M кривой пересѣкаютъ ось абсциссъ въ точкахъ T и N такимъ образомъ, что отрѣзокъ TN сохраняетъ постоянную величину $2a$. Найти уравненіе кривой.

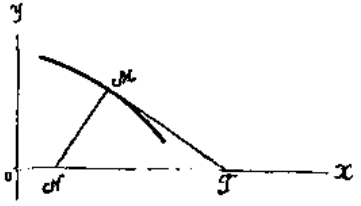
435. Найти кривую, обладающую тѣмъ свойствомъ, что всякая дуга ея равна отрѣзку, образуемому на оси OX касательными въ концахъ этой дуги.

436. Найти кривую подъ условіемъ, чтобы отрѣзокъ касательной между точкой касанія и данной прямой былъ виденъ изъ данной точки подъ угломъ 45°.

437. Найти кривую, у которой квадратъ длины касательной пропорціоналенъ подкасательной.

438. Найти уравненіе такой кривой, чтобы для каждой точки M ея было выполнено слѣдующее условіе: произведеніе отрѣзковъ ON и OT, отсѣкаемыхъ касательной и нормалью на оси OX, должно быть равно постоянному c^2 (черт. 45).

439. Въ точкѣ M кривой проводится касательная, и въ точкѣ пересѣченія T этой касательной съ осью OY возставляется къ ней перпендикуляръ, пересѣкающій OX въ точкѣ A. Какова должна быть кривая для того, чтобы площадь треугольника OAP была постоянной.

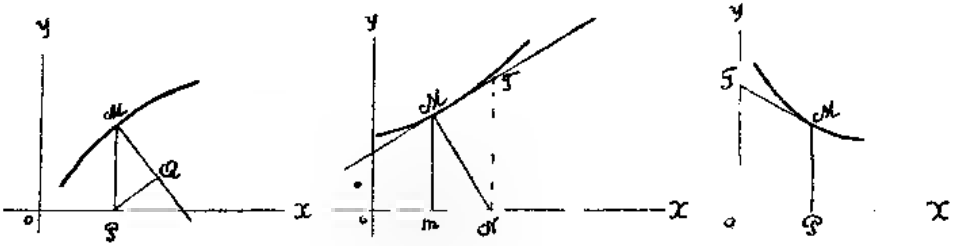


Черт. 45

440. Обозначенія тѣ же, какъ и въ № 439; но требуется опредѣлить кривую подъ условіемъ, чтобы площадь треугольника MPA была постоянной.

441. Найти кривую подъ условіемъ, чтобы средина отрѣзка оси абсциссъ между точками пересѣченія ея съ касательною и нормалью къ кривой была постоянно одна и та же.

442. Найти уравненіе такой кривой, чтобы разстояніе ея нормали въ точкѣ M до основанія ординаты этой точки оставалось постоянно. $PQ = a$ (черт. 46).



Черт. 46 Черт 47. Черт 48.

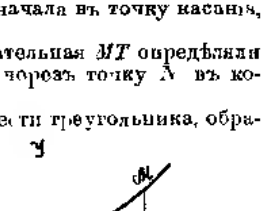
443. Найти кривыя, для которыхъ площадь треугольника, образованнаго осью OX, касательной и радіусомъ векторомъ, проведеннымъ изъ начала въ точку касанія, постоянна.

444. Найти такую кривую, чтобы ея нормаль MN и касательная MT опредѣляли отрѣзокъ NT постоянной длины на прямой проведенной черезъ точку N въ которой нормаль пересѣкаетъ ось OX (черт. 47).

445. Найти кривую подъ условіемъ, чтобы центръ тяжести треугольника, образованнаго касательною, нормалью и осью абсциссъ, находился постоянно на прямой $x = a$.

446. Найти уравненіе кривой, обладающей слѣдующимъ свойствомъ: если въ какой-либо точкѣ M кривой провести касательную, пересѣкающую ось OY въ точкѣ T и провести ординату этой точки MP, то площадь трапеціи $OTMP$ будетъ равна постоянному числу a (черт 48).

Найти интегральную кривую, проходящую черезъ точку (a, a) и найти радіусъ кривизны въ этой точкѣ.



Черт 49.

447. Найти такую кривую AM, чтобы абсцисса центра тяжести площади $OAMP$ была равна $\frac{3}{4}$ абсциссы точки M (черт. 49).

448. Найти кривую подъ условіемъ, что отрѣзокъ нормали въ любой ея точкѣ M, заключенный между осью OX и параболой $y^2 = 4ax$, дѣлится точкой M пополамъ.

449. Найти кривыя, обладающія тѣмъ свойствомъ, что отрѣзокъ касательной въ любой ихъ точкѣ, заключенный между осью OX и прямой $y = ax + b$, дѣлится точкой касанія пополамъ.

450. Найти кривыя, обладающія тѣмъ свойствомъ, что отрѣзокъ касательной въ

любой ихъ точкѣ, заключенный между осью OX и параболой $x^2 = 2p(y - a)$, дѣлится точкой касанія пополам.

451. Найти кривыя, для которыхъ отношеніе разстояній любой нормали до двухъ данныхъ точекъ постоянно.

452 Найти кривую, для которой средина отрѣзка касательной между точкой касанія и осью OX лежитъ на прямой $x + y = 0$.

453. Найти кривую, для которой квадратъ длины дуги пропорціоналенъ ордин[illegible].

454. Найти кривыя, для которыхъ произведеніе разстояній любой касательной до двухъ данныхъ точекъ постоянно.

455. Найти кривыя, у которыхъ отрѣзокъ нормали между осями координатъ имѣетъ постоянную длину

456. Найти такія кривыя, чтобы поднормаль въ каждой ихъ точкѣ была равна разстоянію этой точки до начала координатъ.

457 Найти кривыя, для которыхъ средина отрѣзка нормали между любой точкой кривой и осью абсциссъ лежитъ на прямой $y = x$.

458 Найти кривую подъ условіемъ, чтобы отрѣзокъ касательной между точкой касанія и основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на касательную, имѣлъ постоянную длину

459 Найти кривыя, у которыхъ отрѣзокъ касательной между осями координатъ имѣетъ постоянную длину.

460 Касательная и нормаль въ нѣкоторой точкѣ M кривой пересѣкаютъ ось OX въ точкахъ T и N Какова должна быть кривая для того чтобы постоянно имѣло мѣсто соотношеніе $ON = 2OT$?

461. Въ точкѣ M кривой проведены касательная и нормаль, встрѣчающія перпендикуляръ къ радіусу вектору, проведенный черезъ начало въ точкахъ T и N. Опредѣлить кривую подъ условіемъ, что длина TN равна постоянной длинѣ a

462. Обозначенія тѣ же, что въ № 461, но требуется опредѣлить кривую подъ условіемъ, что площадь треугольника MTN постоянна $(= a^2)$

463. Найти кривую подъ условіемъ, чтобы треугольникъ, составленный радіусомъ векторомъ, касательною и перпендикуляромъ изъ начала координатъ на касательную имѣлъ постоянную площадь a^2.

464 По касательнымъ къ кривой отъ точки касанія M откладываются отрѣзки MN постоянной длины a. Какова должна быть кривая для того, чтобы концы N этихъ отрѣзковъ лежали на окружности круга радіуса a съ центромъ въ началѣ координатъ

465. Обозначенія тѣ же, что и въ задачѣ № 464, но требуется опредѣлить кривую подъ условіемъ, чтобы треугольникъ MON, гдѣ O начало координатъ, былъ равнобедреннымъ.

466. Найти ортогональныя траэкторіи параболъ $y^2 = a(a - 2x)$.

467. Найти ортогональныя траэкторіи равныхъ параболъ, касающихся въ вершинѣ данной прямой.

468 Найти ортогональныя траэкторіи системы эллипсовъ, имѣющихъ одну и ту же большую ось $2a$.

469 Найти ортогональныя траэкторіи эллипсовъ семейства $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ (a параметръ семейства).

470 Прямая перемѣщается такимъ образомъ, что отрѣзокъ ея между осями координатъ остается постояннымъ. Найти ортогональныя траэкторіи этой прямой.

471. Найти ортогональныя траэкторіи круговъ радіуса a, имѣющихъ центры на данной прямой.

472. Найти ортогональныя траэкторіи циссоидъ $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.

473. Найти ортогональныя траэкторіи лемнискатъ $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

474. Парабола $y^2 = 2px$ перемѣщается параллельно самой себѣ такъ, что вершина ея описываетъ параболу $y^2 + 2px = 0$ Найти ортогональныя траэкторіи движущейся параболы

475. Найти ортогональныя траэкторіи строфоидъ $x(x^2 + y^2) = a(a^2 - y^2)$.

476. Найти ортогональныя траэкторіи параболъ, имѣющихъ OX осью, а OY директриссой

477. Найти ортогональныя траэкторіи круговъ, касающихся двухъ данныхъ прямыхъ, составляющихъ уголъ 2θ.

478 Найти ортогональныя траэкторіи кривыхъ $\rho^2 = a^2 \frac{\theta}{\pi - \theta}$.

479. Найти ортогональныя траэкторіи кривыхъ $\rho^{2n} - 2a^n\rho^n \cos n\theta + a^{2n} = c^{2n}$, гдѣ c — параметръ семейства.

480. Найти ортогональныя траэкторіи кривыхъ $\rho^2 = \log tg\,\theta + c$.

481. Найти ортогональныя траэкторіи круговъ радіуса R, проходящихъ черезъ начало координатъ.

462. Найти эвольвенту параболы.

468. Найти эвольвенту цѣпной линіи $y = a\,ch\,\frac{x}{a}$

484. Найти эвольвенту круга.

485. Найти эвольвенту эвольвенты круга $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$.

468. Найти траэкторіи, пересѣкающія кардіоиды $\rho = c(1 + \cos\theta)$ подъ угломъ α

407. Найти траэкторіи, пересѣкающія кривыя $\rho^3 = \frac{c^2}{\cos 2\theta}$ подъ угломъ α

488. Найти траэкторіи, пересѣкающія кривыя $\rho = c\cos\theta$ подъ угломъ α.

488. Найти кривыя, пересѣкающія подъ угломъ 45° касательныя къ кругу $x^2 + y^2 = R^2$.

490. На поверхности $z^2 = 2ay$ найти линіи, касательныя къ которымъ составляютъ уголъ θ съ осью OZ.

491 На поверхности $x^2 + y^2 = 2az$ найти линіи, касательныя къ которымъ составляютъ постоянный уголъ γ съ осью OZ.

492. Найти кривую, пересѣкающую подъ угломъ 45° всѣ параллели поверхности вращенія $x^2 + y^2 = a^2\,ch^2\,\frac{z}{a}$

490. Найти линіи, пересѣкающія подъ угломъ α образующія конуса $x^2 + y^2 = h^2z^2$

494. Найти линіи, пересѣкающія подъ угломъ α меридіаны сферы.

495 Найти линіи пересѣкающія подъ угломъ α меридіаны параболоида вращенія.

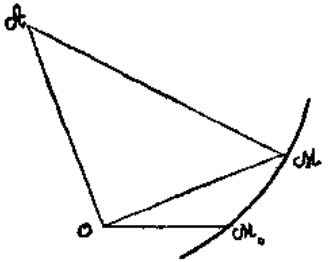
496. Найти линіи, пересѣкающія подъ угломъ α меридіаны кольца

497. Найти кривую, для которой проекція радіуса кривизны на ось OY есть величина постоянная.

498. Найти кривыя, которыхъ радіусъ кривизны равенъ отрѣзку нормали, заключенному между данными параллельными прямыми.

490. Найти кривыя, у которыхъ отношеніе радіуса кривизны къ длинѣ полярной нормали постоянно

500. Найти кривую M_0M такого рода, чтобы площадь сектора M_0OM между постоянымъ радіусомъ векторомъ OM_0 и перемѣннымъ OM была равна половинѣ площади треугольника OMA, образованнаго радіусомъ векторомъ OM, нормалью MA и перпендикуляромъ къ радіусу вектору OA (черт. 50)



Черт. 50.

501. Какія кривыя, кромѣ круга, обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что радіусъ ихъ кривизны постоянно равенъ радіусу вектору?

502. Найти такую кривую, чтобы дуга ея считаемая отъ нѣкоторой точки, была равна длинѣ перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ на касательную въ концѣ дуги.

503. Для какихъ кривыхъ радіусъ кривизны и дуга связаны соотношеніемъ $\rho^2 = s^2 + a^2$?

504. Для какихъ кривыхъ радіусъ кривизны и дуга связаны соотношеніемъ $\rho^2 = 2as$?

505. Для какихъ кривыхъ радіусъ кривизны и дуга связаны соотношеніемъ $s^2 + 9\rho^2 = a^2$?

506. Даны точки O и M_0 ($OM_0 = a$). Требуется опредѣлить кривую, проходящую черезъ M_0 и обладающую тѣмъ свойствомъ, что площадь сектора M_0OM между даннымъ радіусомъ векторомъ OM_0 и произвольнымъ OM равна $\frac{1}{4}$ квадрата дуги M_0M.

507. Разсматривается кривая, обладающая слѣдующимъ свойствомъ: радіусъ кривизны ея всегда равенъ квадрату радіуса вектора ρ. Доказать, что между радіусомъ векторомъ ρ, полярнымъ угломъ θ и дугою кривой s, считаемой отъ любой ея точки, существуетъ зависимость $s = \theta + \sqrt{\rho^2 - (\log c\rho)^2} + const$.

508. Найти общее уравненіе поверхностей такого рода, чтобы уголъ между прямою ON, соединяющею начало со слѣдомъ нормали въ точкѣ M на плоскости XOY, и прямою OP, соединяющею начало съ основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ M на плоскость XOY, былъ равенъ постоянно 45°.

509. Обозначенія тѣ-же, что и въ задачѣ № 508; но требуется опредѣлить поверхность подъ условіемъ, чтобы площадь треугольника OVP была постоянна (a^2).

510. Найти общее уравненіе поверхностей такого рода, чтобы длина отрѣзка нормали MN между точкой поверхности M и точкой встрѣчи нормали N съ плоскостью XOY была равна ON.

511. Найти общее уравненіе поверхностей, пересѣкающихъ подъ прямымъ угломъ конусы xy az^2 0.

512 Найти общее уравненіе поверхностей, пересѣкающихъ подъ прямымъ угломъ поверхности xyz a.

513 Найти поверхность, пересѣкающую подъ прямымъ угломъ сферы $x^2 + y^2 + z^2$ $ax = 0$ и проходящую черезъ прямую x y 0, z h.

514 Найти поверхность, пересѣкающую подъ прямымъ угломъ поверхности $xy - az$ (a — параметръ) и проходящую черезъ кривую $z = c$; $x^2 + y^2 = R^2$.

ОТДѢЛЪ X.

Опредѣленные интегралы.

Непосредственное вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x)}$.

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$.

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^5+1}\,dx$

6. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}$, $-\pi<\alpha<+\pi$.

7. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$, $a>1$.

8. $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,x\,dx$.

9. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{x^4\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$.

10. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}}$; $0<\alpha\beta<1$, $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$.

11. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{(1-\alpha x)(1-\beta x)\,dx}{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)\sqrt{1-x^2}}$.
$|\alpha|<1$, $|\beta|<1$

12. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^2 x\,dx}{(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)(1-2\beta\cos x+\beta^2)}$; $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$.

13. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^2 x\,dx}{1+2a\cos x+a^2}$; $a^2<1$.

14. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}$; $a>0$.

15. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{1-2a\cos x+a^2}$, $a^2<1$

16. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}$

17. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{tg\,x}}$.

18. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\cos 3x\sqrt{\cos 2x}\,dx$.

Примѣненіе формулъ приведенія къ нахожденію опредѣленныхъ интеграловъ.

19. $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,.\,(2n+1)}$.

20. $\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$.

21. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(Ax^2+2Bx+C)^n}$; $AC-B^2>0$.

22. $\int_0^1 x^m (\log x)^n\,dx$.

23. $\int_0^\infty x^n e^{-x} \sin x\,dx$.

24. $\int_0^\infty x^n e^{-x} \cos x\,dx$.

25. $\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2}\,dx$

26. $\int_0^\pi \cos^{2m+1} x \cos(2m+1)x\,dx$

27. $\int_0^\pi \cos^{2m} x \cos 2mx\,dx$.

28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2k} x \cos nx\,dx$.

29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin nx\,dx$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin mx\,dx$, m цѣлое число >0.

31. $\int_0^\pi \frac{\sin mx}{\sin x}\,dx$, m цѣлое число

32. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2m-1)x}{\cos x}\,dx$.

33. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x\,.\,\cos 2mx\,dx$

34. $\lambda_m = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos mx}{\cos x}\,dx$

35. $J_k = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\cos(2k-1)x}{\cos x}\,dx$, $\alpha>0$.

36. $J_k = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \frac{\cos(2k-1)x}{\cos x}\,dx$, $\alpha>0$.

37. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx\,dx$, m и n цѣл. числа >0.

38. $\int_0^{2\pi} \cos^m x \cos nx\,dx$, гдѣ m и n цѣлыя положительныя числа.

39. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin^{2n} x\,dx$, $a>0$.

40. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin^{2n+1} x\,dx$, $a>0$.

41. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} e^{-mx} \cos^{2n} x\, dx.$

42. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-mx} \cos^{2n+1} x\, dx.$

Опредѣленные интегралы, получаемые черезъ разложеніе въ рядъ подъинтегральной функціи.

43. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos mx\, dx}{1 - 2a \cos x + a}.$

44. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x \sin mx}{1 - 2a \cos x + a^2}\, dx$

45. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos mx}{1 - a \cos x}\, dx$, m — цѣлое число, $a^2 < 1$.

46. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos mx}{1 - a \cos x}\, x\, dx$, $a^2 < 1$.

47. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)(1 - 2\beta \cos x + \beta^2)}.$

48. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1 - 2a \cos x + a^2}$

49. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}\,(1 + 2\alpha \cos mx + \alpha^2)}.$

50. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x \sin mx\, dx}{(1 + x^2)(1 + 2\alpha \cos mx + \alpha^2)}$

51. $\int\limits_0^{\pi} \log(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)\, dx.$

52. $\int\limits_0^{\pi} \log(1 - 2a \cos x + a^2) \cos kx\, dx$, k цѣлое число > 0.

53. $\int\limits_0^{\infty} \log(1 - 2a \cos x + a^2) \frac{dx}{1 + x^2}$ $(a^2 < 1)$.

54. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 x \cos x}{(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)^2}\, dx$ $(\alpha^2 < 1)$.

55. $\int\limits_0^{\pi} \frac{(1 - r^2)(1 - s^2)\, dx}{(1 - 2r \cos kx + r^2)(1 - 2s \cos lx + s^2)}$; $r^2 < 1$, $s^2 < 1$, l и k — цѣлыя числа.

56. $\int\limits_0^{1} \frac{\log x\, dx}{1 - x^2}$

57. $\int\limits_0^{1} \log \frac{1 + x}{1 - x}\, \frac{dx}{x}.$

58. $\int\limits_0^{\infty} \log \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\, dx$

59. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{e^{ax} - e^{-ax}}\, dx$

60. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2mx \log \sin x\, dx.$

61. $\int\limits_0^{2\pi} e^{-a \cos x} \cos(a \sin x + nx)\, dx.$

62. $\int\limits_0^{2\pi} e^{-a \cos x} \sin(a \sin x + nx)\, dx.$

63. Доказать, что $\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{e^{2\pi\alpha} - 1}\, d\alpha = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right\}$.

64. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{1 + e^\alpha}\, d\alpha = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2 sh\, \pi x}$.

Вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ при помощи преобразованія перемѣннаго.

65. $\int\limits_0^1 \frac{\log(1 + x)}{1 + x^2}\, dx$. Положить $x = tg\, \varphi$.

66. $\int\limits_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$.

67. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$.

68. $\int\limits_0^\pi x \log \sin x\, dx$

69. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\log tg\, x)^2\, dx$.

70. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x)^2\, dx$

71. $\int\limits_0^\pi x \sin^{2m} x\, dx$ и $\int\limits_0^\pi x \sin^{2m+1} x\, dx$

72. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 + 2ax}\, x\, dx$

73. $\int\limits_0^\infty (e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x})\, e^{-\beta^2 x^2}\, dx$.

74. $\int\limits_a^b (x - a)^{\frac{3}{2}} (b - x)^{-\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{x - a} + \frac{\beta^2}{b - x}\right)}\, dx$. Положить $\frac{x - a}{b - x} = \frac{\alpha}{\beta} e^{2t}$.

75. Доказать равенство $\int\limits_0^\infty f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a}\int\limits_0^\infty f(\sqrt{x^2 + 4ab})\, dx$, предполагая, что входящіе въ него интегралы имѣютъ смыслъ.

76. $\int\limits_0^\infty e^{-\left(ax^2 + \frac{b}{x^2}\right)}\, dx$, $a > 0$, $b > 0$.

Примѣненіе дифференцированія по параметру

77. $\int\limits_0^\infty \frac{\log(1 + \alpha^2 x^2)}{\beta^2 + x^2}\, dx$.

78. $\int\limits_0^1 \frac{\log(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}\, dx$; $\alpha^2 < 1$.

79. $\int\limits_0^1 \frac{\log(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$; $\alpha^2 < 1$.

80. $\int\limits_0^1 \frac{\log(1 - \alpha^2 x^2)}{x\sqrt{1 - x^2}}\, dx$; $|\alpha| < 1$

81. $\int\limits_0^\infty \log\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) \log\left(1 + \frac{b^2}{x^2}\right) dx$; $a > 0$, $b > 0$.

82. $\int_0^a \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx.$

83. $\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\,dx.$

84. $\int_0^\infty \frac{\sum_1^n A_i e^{\alpha_i x}}{x}\,dx,\quad A_1+A_2+\ldots+A_n=0;\ \alpha_i<0;\ i=1,2,\ldots n$

85. $\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}-e^{-\alpha x}-x(\alpha-\beta)e^{-\alpha x}}{x^2}\,dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

86. $\int_0^\infty \left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

87. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log[1+(m^2-1)\sin^2 x]\,dx.$

88. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)\,dx.$

89. $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin kx\,dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

90. $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

91. $\int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}}-e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx.$

92. $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}\,dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

93. $\int_0^\infty e^{-ax}\sin^2 bx\,\frac{dx}{x},\quad a>0.$

94. $\int_0^\infty e^{-ax}\sin^2 bx\,\frac{dx}{x^2},\quad a>0.$

95. $\int_0^\pi \log(1+\sin\alpha\cos x)\,\frac{dx}{\cos x}.$

96. $\int_0^\pi \log(1+\alpha\cos x)\,dx\quad (\alpha<1)$

97. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\frac{1+\alpha\sin z}{1-\alpha\sin z}\,\frac{dz}{\sin z},\quad (\alpha^2<1).$

53. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\log\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\,dx,\quad a>b>0.$

99. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx,\quad a^2<1.$

100. $\int_0^\infty \cos ax\log\frac{b^2+x^2}{c^2+x^2}\,dx$

101. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx.$

102. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(m\sin x)\sin x\,dx.$

103. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(m\sin x)\,\frac{dx}{\sin x}.$

104. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\alpha x\,dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

105. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\alpha x\,dx}{x(1+x^2)}$

199. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x(1+\beta^2x^2)}\,dx$

107. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\alpha x\cdot\operatorname{arctg}\beta x}{x^2}\,dx;\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

108. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{\sin^2 x}\, dx.$

109. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\log(1+\alpha^2x^2)\, \operatorname{arctg} \beta x}{x^3}\, dx.$

110. $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha^2x^2} \cos 2\beta x\, dx$

111 $\int\limits_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2\beta x\, dx.$

112. $\int\limits_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} \sin 2\beta x\, dx$

113. $\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} \cos 2x\, dx$

114. Доказать, что $\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} \frac{\sin 2tx}{t}\, dt = V = \int\limits_0^{x} e^{-t^2}\, dt.$

115. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \sin 2\beta x\, dx = e^{-\beta^2} \int\limits_0^{\beta} e^{x^2}\, dx.$

116. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} \log(1+\alpha^2) - \int\limits_0^{\alpha} \frac{\log x}{1+x^2}\, dx, \quad \alpha > 0.$

Интегрированіе подъ знакомъ опредѣленнаго интеграла.

117. На основаніи равенства $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int\limits_0^{\infty} z^{m-1} e^{-xz}\, dz$ доказать, что

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^{2p} x}{x^m}\, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2p}{\Gamma(m)} \int\limits_0^{\infty} \frac{z^{m-2}}{(z^2+2^2)(z^2+4^2)\ldots(z^2+(2p)^2)}\, dz$$

p цѣлое число $\leqq \frac{m}{2}$, $m > 1$. См. № 39.

118. На основаніи равенства $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int\limits_0^{\infty} z^{m-1} e^{-xz}\, dz$ доказать, что

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^{2p+1} x}{x^m}\, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2p+1)}{\Gamma(m)} \int\limits_0^{\infty} \frac{z^{m-1}\, dz}{(z^2+1)(z^2+3^2)\ldots(z^2+(2p+1)^2)};$$ $2p+1$ цѣлое число (нечетное) $\geqq m$; $m > 1$. См. № 40.

119. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^3}\, dx.$

120. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\, dx.$

121. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2}\, dx.$

122. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\, dx.$

123. На основаніи равенства $\frac{1}{1+x^2} = 2 \int\limits_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)}\, d\alpha$ доказать, что

$\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}$ при $a > 0$. См. интегралъ № 110.

124. Найти $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$ и $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}}$, принимая въ соображеніе, что

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\,d\alpha$$

125. Доказать, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-kx^2} \frac{\cos 2\alpha x}{p^2+x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2p}\, e^{kp^2} \left(e^{-2p\alpha} \int\limits_{p\sqrt{k}-\frac{\alpha}{\sqrt{k}}}^\infty e^{-x^2}\,dx + e^{2p\alpha} \int\limits_{p\sqrt{k}+\frac{\alpha}{\sqrt{k}}}^\infty e^{-x^2}\,dx \right)$$

126. $$\int\limits_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{z+k} = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-kx}}{1+x^2}\,dx; \quad k > 0.$$

127. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin mx}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} = 2\cos\frac{m\pi}{2} \int\limits_0^1 \frac{x^m\,dx}{1+x^2}$$

139. Доказать равенство $\int\limits_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \right\} e^{-nz} \sin nz\,dz =$

$4n^2 \int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{(x^4+4n^4)(e^{2\pi x}-1)}$. См. № 63.

129. Доказать равенство $\left\{ \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt \right\}^2 = \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^1 \frac{e^{-x^2(u^2+1)}}{u^2+1}\,du$ и вывести отсюда извѣстный интегралъ $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

Эйлеровы интегралы.

130. $\int\limits_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3}\,dx.$

131. $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}.$

132. $\int\limits_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}}.$

133. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}.$

134. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} tg^{2n-1} x\,dx, \quad 0 < n < 1.$

135. Выразить черезъ функцію Γ интегралъ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$

136. Выразить черезъ функцію Γ интегралъ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x\,dx$

137. На основании №№ 135 — 136 выразить двоякимъ образомъ интегралъ $\int_0^\pi \sin^{m-1} x\,dx$ и черезъ сравненіе результатовъ вывести соотношеніе.

$$2^{m-1}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(m).$$

138. Выразить черезъ функцію Γ интегралъ $\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}\,dx;\ \alpha > 0,\ \beta > 0$

139. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}(x+a)}$. См. № 138. **140.** $\int_0^\pi \frac{\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi}{(1+k\cos\varphi)^n},\ 0 < k < 1,\ n > 0.$

141. Выразить черезъ функцію B интегралъ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2l-1} x \sin^{2m-1} x\,dx}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^{l+m}}$.

142. $\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x}\,dx,\quad 0 < a < 1.$ **143.** $\int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{(1+x)^2};\quad (0 < a < 1)$

144. $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\log x}{(1+x)^2}\,dx.$ **145.** $\int_0^\infty \frac{\log\left(x+\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\,dx.$

146. $\int_0^\infty \frac{z^a \log z}{1+z^2}\,dz,\ (a^2 < 1).$ **147.** $\int_0^\infty \frac{z^a (\log z)^2}{1+z^2}\,dz,\ (a^2 < 1).$

148. $\int_0^1 \frac{x^{-\frac{a}{2b}} - x^{\frac{a}{2b}}}{1-x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

149. Доказать, что $\int_0^\infty \frac{x^{p+n}\,dx}{(1+x)^{2n+2}} = (-1)^n \frac{p(p^2-1)\ldots(p^2-n^2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots 2n+1)}\,\frac{\pi}{\sin p\pi}$,

гдѣ n цѣлое число.

150. Доказать, что $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{(1+x)^{n+1}} = (-1)^n \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-n)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\,\frac{\pi}{\sin p\pi}$,

гдѣ n — цѣлое число > 0; $p < n+1$.

151 $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\mu x}{\operatorname{sh}\nu x}\,dx;\ (\nu > \mu > 0).$ **152.** $\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\mu x}{\operatorname{ch}\nu x}\,dx;\ (\nu > \mu > 0).$

153. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha x}{x\operatorname{sh} x}\,dx,\ \left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right).$ **154.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\mu x\,dx}{e^x + e^{-x}}$

155. Если положить $J = \int_0^\infty e^{-x^4}\,dx;\ J_1 = \int_0^\infty x^2 e^{-x^4}\,dx$, то $J\,.\,J_1 = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

156. Если положить $J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ и $J_1 = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$, то $J\,.\,J_1 = \frac{\pi}{4}$.

157. $\int_0^1 \log\Gamma(x)\,dx.$ **158.** $\int_a^{a+1} \log\Gamma(x)\,dx;\quad a > 0.$

Разныя задачи.

159. $\int\limits_0^\infty \frac{x \sin ax}{(1+x^2)^2}\, dx,\ a > 0.$

159. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\, dx,\ a > 0$

161. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \frac{\sin x}{x}\, dx.$

162. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x\, dx}{x^2 + a^2}$

163. Доказать, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin px}{\sin x} \cos^{p-1} x\, dx = \frac{\pi}{2},\ p > 0$ (Liouville).

164 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2}\, dx.$

165. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 ax}{x^3}\, dx.$

166. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^4 ax}{x^4}\, dx.$

167. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\, dx,\ a \geqq b > 0.$

168. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x \cos ax}{x^2}\, dx.$

169. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x \cos ax}{x^3}\, dx,\ a > 0.$

170. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin tx \sin^2 x}{x^3}\, dx.$

171 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}\, dx.$

172. $\int\limits_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^3}\, dx.$

173. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x^2} x \sin 2x - \sin^2 x}{x^2}\, dx.$

174. Если функція $f(x)$ такова, что при всякомъ положительномъ A интегралъ $\int\limits_A^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx$ имѣетъ смыслъ, то $\int\limits_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0) \log \frac{b}{a};\ a > 0,\ b > 0$ (Frullani).

175. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx,\ a > 0,\ b > 0.$

176. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x}\, dx.$

177. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} ax - \operatorname{arc\,tg} bx}{x}\, dx;\ a > 0, b > 0.$

178. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax - a \sin x}{x^2}\, dx;\ a \geqq 0.$

179. $\int\limits_0^\infty \frac{ax \cos x - \sin ax}{x^2}\, dx;\ a \geqq 0.$

158. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{k-1} \log x}{(a^2 + x^2)^k}\, dx,\ k > 0,\ a > 0.$

ОТДѢЛЪ XI

Ряды.

Изслѣдованіе сходимости рядовъ.

Изслѣдовать сходимость рядовъ, общій членъ которыхъ имѣетъ видъ

1. $u_n = \frac{1}{x^n + 1}$

2. $u_n = \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$.

3. $u_n = \frac{x^n}{(1 + x)(1 + x^2)\ldots(1 + x^n)}$.

4. $u_n = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n+1}}$.

5. $u_n = \frac{(1 . 2 . 3 \ldots n)^2}{1 . 2 . 3 \ldots 2n} x^n$.

6. $u_n = 1 . 2 . 3 \ldots n \left(\frac{x}{n}\right)^n$.

7. $u_n = \frac{n^n}{1 . 2 . 3 \ldots n} x^n$.

8. Выяснить условія сходимости гипергеометрическаго ряда: $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta(\beta + 1)}{1 . 2\gamma(\gamma + 1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{1 . 2 . 3\gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)} x^3 + \ldots$

9. $u_n = \frac{1 . 2 . 3 \ldots n}{(x + 1)(x + 2)\ldots(x + n)}$.

10. $u_n = n \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)}$, $a > 0$, $b > 0$.

11. $u_n = \frac{(a + 1)(2a + 1)\ldots(na + 1)}{(b + 1)(2b + 1)\ldots(nb + 1)}$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$.

12. $u_n = \frac{1 . 3 . 5 \ldots 2n-1}{2 . 4 . 6 \ldots 2n} \frac{1}{2n+1}$

13. $u_n = \frac{1 . 3 . 5 \ldots 2n - 1}{2 . 4 . 6 \ldots 2n} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

14. $u_n = \left(\frac{1 . 3 . 5 \ldots 2n - 1}{2 . 4 . 6 \ldots 2n}\right)^\alpha$.

15. $u_n = \frac{\beta(\beta + 1)\ldots(\beta + n - 1)}{1 . 2 . 3 \ldots n} \frac{1}{n^\alpha}$; $\beta > 0$, $\alpha > 0$

16. $u_n = a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{m+n}}$.

17. $u_n = (2 - \sqrt{e})(2 - \sqrt[3]{e})\ldots(2 - \sqrt[n]{e})$.

18. $u_n = 1 - \cos\frac{\pi}{n}$.

19. $u_n = \log\cos\frac{x}{n}$

20. $u_n = \log tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{n}\right)$.

21. $u_n = \left\{\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\right)^k - 1\right\}^p$

22. $u_n = n\left\{tg\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\right\}^p$.

23. $u_n = \log\frac{n + 1}{n - 1} - \frac{a}{n}$.

24. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\log\frac{n + 1}{n - 1}\right)^p$.

25. $u_n = \sqrt{n + 1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n - 1}$.

26. $u_n = \sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}$

27. $u_n = a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2$.

28. $u_n = x^{\log n}$.

29. $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

30. $u_n = \left(1 - \frac{x \log n}{n}\right)^n$

31. Изслѣдовать сходимость ряда $\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \ldots$

32. Изслѣдовать сходимость ряда съ общимъ членомъ $u_n = q^n x^{m^2}$; $|q|<1$, $x>1$, гдѣ черезъ m обозначено число цифръ числа n.

33. Доказать, что рядъ, въ которомъ отношеніе послѣдующаго члена къ предыдущему равно $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{4} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2}$, будетъ сходящимся

34. Въ послѣдовательности чиселъ $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, $u_5 = 8$, $u_6 = 13, \ldots$ три послѣдовательныхъ члена u_{n-1}, u_n, u_{n+1} связаны соотношеніемъ $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Изслѣдовать сходимость ряда $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \ldots$

35. Въ ряду чиселъ $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 9, \ldots$ каждыя четыре послѣдовательныхъ числа u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n-2} связаны соотношеніемъ $u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + u_{n-2}$ Изслѣдовать сходимость ряда $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \ldots$

36 Послѣдовательность чиселъ составляется по слѣдующему закону: $v_0 = x > 0$, $v_1 = \sin x$, $v_2 = \sin \sin x, \ldots v_n = \sin v_{n-1}, \ldots$ При какихъ μ рядъ $|v|^\mu + |v_1|^\mu + |v_2|^\mu + \ldots$ будетъ сходящимся и при какихъ расходящимся?

Непосредственное суммированіе конечныхъ и безконечныхъ рядовъ

37. Найти сумму $f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$, гдѣ $f(x) = a + bx + cx^2$.

38. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2$. **39.** $1^3 + 5^3 + 9^3 + \ldots + (4n+1)^3$.

40. $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \ldots + n(n+1)^2$.

41. $1 \cdot n^2 + 2(n-1)^2 + \ldots + k(n-k+1)^2 + \ldots + n \cdot 1^2$.

42. $\sum_{k=1}^{n} k^2 (n-k+1)^2$. **43** $1^3 - 2^3 + 3^3 - \ldots + (-1)^{n-1} n^3$.

44. $1^4 - 2^4 + 3^4 - \ldots + (-1)^{n-1} n^4$.

45. Полагая $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$, доказать равенства $2S_5 + S_3 = 3S_2^2$, $S_7 + S_5 = 2S_3^2$.

Опредѣлить суммы **45.** $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin(n-1)x$.

47. $\sin x + 2\sin 2x + \ldots + (n-1)\sin(n-1)x$.

48. $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos(n-1)\alpha$.

49. $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + (n-1)\cos(n-1)x$

50. $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x$.

51. $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \ldots - \sin 2nx$.

52 $\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2 nx$.

53. $\sin^2 x - \sin^2 3x + \sin^2 5x - \ldots + (-1)^{n-1} \sin^2 (2n-1)x$.

54. Примѣнивъ къ функціи $\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos\frac{2n+1}{2}x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2}}$ надлежащимъ образомъ формулу Лагранжа, доказать, что рядъ $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots$ сходящійся и опредѣлить его сумму при условіи $0 < x < 2\pi$.

35. Примѣнивъ къ функціи $\varphi(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \frac{\cos 2nx}{4n\sin x}$ надлежащимъ образомъ формулу Лагранжа, доказать, что рядъ $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots$ сходящійся и что сумма его при условіи $0 < x < \pi$ не зависитъ отъ x и равна $\frac{\pi}{4}$

56. Найти сумму $x \sin \alpha + x^2 \sin 2\alpha + \ldots + x^{n-1} \sin (n-1)\alpha$.

57. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{n=\infty} \sin an \cdot x^n$; $|x| < 1$.

58. Найти сумму $1 + x \cos \alpha + x^2 \cos 2\alpha + \ldots + x^{n-1} \cos (n-1)\alpha$.

59. Найти при условіи $|x| < 1$ сумму ряда $1 + x \cos \alpha + x^2 \cos 2\alpha + \ldots$

60. Найти при $|x| < 1$ сумму ряда $a + (a+1)x + (a+2)x^2 + \ldots + (a+n)x^n + \ldots$

61. Опредѣлить при $|x| < 1$ сумму ряда $1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2 x^{n-1} + \ldots$

62. Опредѣлить при $|x| < 1$ сумму ряда $x - 11x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}(n^3 + n^2 - 1)x^n + \ldots$

63. Опредѣлить при $|x| < 1$ сумму ряда $1 + 16x + 81x^2 + \ldots + n^4 x^{n-1} + \ldots$

64. Разложить въ рядъ по восходящимъ степенямъ z дробь $\frac{1-z}{1-z-2z^2}$ и опредѣлить область его сходимости.

65. То же для дроби $\frac{1-z}{1-5z+6z^2}$. **66.** То же для дроби $\frac{1+z+z^2}{1-z-z^4+z^5}$.

67. Разложить при $|x| < 1$ въ рядъ по восходящимъ степенямъ x дробь $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$.

68. Разложить при $|x| < 1$ въ рядъ по восходящимъ степенямъ x дробь $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$.

69. То же для дроби $\frac{a+bz}{(1-2z\cos\varphi+z^2)^2}$.

70. Если положить $\frac{1}{1+bx+ax^2} = 1 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \ldots$, то будемъ имѣть слѣдующее равенство $1 + p_1^2 x + p_2^2 x^2 + p_3^2 x^3 + \ldots = \frac{1+ax}{(1-ax)\{(1+ax)^2 - b^2 x\}}$.

---

71. Найти сумму $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$.

Найти суммы рядовъ

72. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots$ **73.** $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots$

74. Найти сумму $\frac{1}{(c+1)(c+p+1)} + \frac{1}{(c+2)(c+p+2)} + \ldots + \frac{1}{(c+n)(c+p+n)}$, гдѣ p — цѣлое положительное число.

Найти суммы рядовъ:

75. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \ldots$ **76.** $\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 11} + \ldots$

77. $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \ldots$

78. $\frac{2}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{3}{2^2 \cdot 4^2} + \ldots + \frac{n+1}{n^2(n+2)^2} + \ldots$

79. $\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{2}{3^2 \cdot 5^2} + \ldots + \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} + \ldots$

80. $\frac{3}{1^2 \cdot 5^2} + \frac{5}{3^2 \cdot 7^2} + \ldots + \frac{2n+1}{(2n-1)^2(2n+3)^2} + \ldots$

81. Найти сумму $\frac{1}{c(c+1)(c+2)} + \frac{1}{(c+1)(c+2)(c+3)} + \ldots + \frac{1}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)}$.

82. Найти сумму ряда $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$

83. Доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n)(c+p+n)(c+2p+n)} = \frac{1}{2p} \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(c+n)(c+p+n)}$.

84. $\frac{1}{1.5.9}+\frac{1}{3.7.11}+\frac{1}{5.9.13}+\ldots$

85. $\frac{1}{1.4.7}+\frac{1}{2.5.8}+\frac{1}{3.6.9}+\ldots$

86. Найти сумму $\frac{1}{c(c+1)(c+2)(c+3)}+\frac{1}{(c+1)(c+2)(c+3)(c+4)}+\ldots+\frac{1}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)(c+n+2)}$.

87. Найти сумму ряда $\frac{1}{1.3.5.7}+\frac{1}{3.5.7.9}+\frac{1}{5.7.9.11}+\ldots$

88. $\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{4}{3.4.5.6}+\frac{9}{4.5.6.7}+\ldots+\frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}+\ldots$

89. Исходя изъ тождества $arc\,tg\frac{c}{a+n-1}-arc\,tg\frac{c}{a+n}-arc\,tg\frac{c}{c^2+(a+n)(a+n-1)}$, доказать равенство $\sum_{k=1}^{n} arc\,tg\frac{c}{c^2+(a+n)(a+n-1)}=arc\,tg\frac{c}{a}-arc\,tg\frac{c}{a+n}$

90. $arc\,tg\frac{1}{2}+arc\,tg\frac{1}{8}+\ldots+arc\,tg\frac{1}{2n^2}+\ldots$

91. $arc\,tg\frac{1}{3}+arc\,tg\frac{1}{7}+\ldots+arc\,tg\frac{1}{n^2+n+1}+\ldots$

92. $arc\,tg\frac{\sqrt{3}}{2}+arc\,tg\frac{\sqrt{3}}{12}+\ldots+arc\,tg\frac{\sqrt{3}}{2n(2n-1)}+\ldots$

93. Исходя изъ равенства $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^{n-1}})=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}$, опредѣлить сумму $s_n=\frac{x}{1+x}+\frac{2x^2}{1+x^2}+\frac{4x^4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^n}}$. Затѣмъ опредѣлить сумму безконечнаго ряда $s=\frac{x}{1+x}+\frac{2x^2}{1+x^2}+\frac{4x^4}{1+x^4}+\ldots$

94. Доказать, что $\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\ldots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^n}}$. Опредѣлить сумму ряда $S=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\ldots$ при условіи его сходимости.

95. Исходя изъ равенства $\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{4}.\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$ опредѣлить сумму $S_n=\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+\frac{1}{4}tg\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}tg\frac{x}{2^n}$. Затѣмъ опредѣлить сумму безконечнаго ряда $S=\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+\frac{1}{4}tg\frac{x}{4}+\frac{1}{8}tg\frac{x}{8}+\ldots$

96. Опредѣлить сумму $S_n=\left(\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{4\cos\frac{x}{4}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2^n\cos\frac{x}{2^n}}\right)^2$

Затѣмъ найти сумму безконечнаго ряда $S=\left(\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{4\cos\frac{x}{4}}\right)^2+$

См. № 95.

Суммированіе рядовъ съ помощью опредѣленныхъ интеграловъ.

97. Представить въ видѣ опредѣленнаго интеграла сумму ряда $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \ldots,\quad a>0,\quad b>0.$

Опредѣлить суммы рядовъ

98. $S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots$ **99.** $S = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \ldots$

100. $S = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \ldots$, гдѣ суммированіе распространяется на всѣ нечетныя числа, не дѣлящіяся на 3.

101. $S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots$

102. $S = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$

103. $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \ldots$

104. $S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots$

105. $S = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \ldots - \frac{1}{8n-1} + \frac{1}{8n+1} - \ldots$

106. $S = \sum\limits_{n=1,3,5,7,\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}}{n}.$ **107.** $S = \sum\limits_{n=1,3,5,7,\ldots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}}}{n}.$

108. Выразить опредѣленнымъ интеграломъ сумму ряда: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)(n+\beta)}$, $\alpha > -1;\ \beta > -1,\ \alpha \neq \beta.$

Опредѣлить суммы слѣдующихъ рядовъ.

108. $S = \sum\limits_{n=3,5,7,\ldots} \frac{1}{n^2-1}.$ **110.** $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$

111. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-1}.$ **112.** $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+h)}$, h цѣлое число $\geqq 1$.

113. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+h)}$; h цѣлое число $\geqq 1$.

114. Выразить опредѣленнымъ интеграломъ сумму ряда

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)\ldots(n+\alpha_k)}$, гдѣ $\varphi(n)$ полиномъ степени по крайней мѣрѣ на 2 единицы ниже степени знаменателя; числа α_i $(i = 1, 2, 3, \ldots k)$ вещественныя, различныя и > -1.

Опредѣлить суммы слѣдующихъ рядовъ:

115. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)}.$ **116.** $S = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)(n^2-1)}.$

117. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2}$ **118.** $S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \ldots$

119. $S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} - \ldots$

120. $S = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots$

121. $S = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \ldots$

122. $S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} + \ldots$

123. $S = \frac{1^2}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \frac{3^2}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13} + \frac{5^2}{7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16} + \ldots$

124. $S = \frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \ldots$

125. $S = \frac{1}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2} + \ldots$

126. $S = \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \ldots$ **127.** $S = \frac{1}{1^2 \cdot 5} + \frac{1}{3^2 \cdot 6} + \frac{1}{5^2 \cdot 7} + \ldots$

128. $S = \frac{1}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2} + \ldots$

129. $S = \frac{x}{1(1+h)} + \frac{x^2}{2(2+h)} + \frac{x^3}{3(3+h)} + \ldots$, h цѣлое число > -1.

130. $S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$, $|x| < 1$

131. $S = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{x}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{x^2}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \ldots$, $|x| < 1$.

132. $S = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{9 \cdot 11 \cdot 13} x + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{11 \cdot 13 \cdot 15} x^2 + \ldots$, $|x| < 1$.

---

133. Суммировать рядъ $S = \frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots$, принявъ въ соображеніе интегралъ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \varphi \, d\varphi$.

134. Суммировать рядъ

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} + \ldots$$

воспользовавшись тѣмъ обстоятельствомъ, что величина интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi$ извѣстна.

135. Найти сумму ряда $1 - \frac{\sin^2 \theta}{3} - \frac{2 \sin^4 \theta}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 4 \sin^6 \theta}{3 \cdot 5 \cdot 7} \ldots$

136. Суммировать рядъ $1 - \frac{1}{3} tg^2 \theta + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} tg^4 \theta - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} tg^6 \theta + \ldots$ при условіи $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

Суммировать ряды.

137. $S = \frac{1}{4} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 8} - \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n(2n+4)} + \ldots$

138. $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \ldots$

139. $S = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{6} + \ldots$

140. Принявъ во вниманіе, что $\int_0^1 x^{m-1} \log x\, dx = -\frac{1}{m^2}$ $(m > 0)$, суммировать рядъ $S = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7^2} + \ldots$

141. Принявъ во вниманіе, что $\int_0^1 x^{m-1} (\log x)^2\, dx = \frac{2}{m^3}$ $(m > 0)$, суммировать рядъ $S = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7^3} + \ldots$

---

142. Выразить опредѣленнымъ интеграломъ сумму гипергеометрическаго ряда $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots$, $\alpha > 0$, $\gamma - \alpha > 0$.

143. Найти $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ (см. № 142), предполагая условія сходимости выполненными.

Выразить опредѣленнымъ интеграломъ суммы рядовъ

144. $S = 1 + \frac{a}{b}x + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}x^3 + \ldots$, $b > 0$.

145. $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}{(a+nb)(a+1+nb)\ldots(a+k+nb)}x^n$; $a > 0$; $b > 0$.

Опредѣлить суммы рядовъ:

146. $S = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 + \ldots$

147. $S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\cdot\frac{1}{8} + \ldots$

148. $S = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 + 5\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 + 7\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2 + \ldots$

149. $S = \frac{1}{x} + \frac{1\cdot 2}{x(x+1)} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{x(x+1)(x+2)} + \ldots + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} + \ldots$

150. $S = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} + \ldots$; $b > a+1$, $a > 0$

151. $S = \frac{a}{b} + 2\frac{a(a+1)}{b(b+1)} + 3\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} + \ldots$; $b > a+2$, $a > 0$

152. $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots$

153. $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots$

154. $S = 1 + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 4} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 4\cdot 7} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 11} + \ldots$

155. Доказать слѣдующее равенство: $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t+2)^2} + \ldots = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t(t+1)} + \frac{1\cdot 2}{3t(t+1)(t+2)} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4t(t+1)(t+2)(t+3)} + \ldots$, если $t > 0$.

156. Выразить опредѣленнымъ интеграломъ сумму ряда $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)}x + \frac{1}{a(a+1)(a+2)}x^2 + \ldots + \frac{1}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}x^{n-1} + \ldots$; $a > 0$.

157. Доказать слѣдующее тождественное равенство двухъ рядовъ:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{a(a+1)(a+2)} + \ldots = e\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{1\cdot(a+1)} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot(a+2)} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(a+3)} + \ldots\right).$$

Опредѣленіе суммъ рядовъ съ помощью дифференцированія.

Опредѣлить суммы рядовъ

158. $S = \frac{z^3}{3} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^{11}}{11} + \ldots$

159. $S = z + \frac{z^5}{5} + \frac{z^9}{9} + \ldots$

160. $S = 1 + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots$

161. $S = 1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots$

---

162. Принявъ въ соображеніе дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ функція $y = \frac{\log(1+x)}{(1+x)^n}$, доказать, что $\frac{\log(1+x)}{(1+x)^n} = x - n(n+1)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\frac{x^2}{2!} + n(n+1)(n+2)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\frac{x^3}{3!} - \ldots$

163. Принявъ въ соображеніе дифференціальное уравненіе, коему удовлетворяетъ функція $y = \sqrt{1-x^2}\,\arcsin x$, доказать, что $y = x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\frac{x^5}{5} - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\frac{x^7}{7} - \ldots$

164. Принявъ въ соображеніе дифференціальное уравненіе, коему удовлетворяетъ функція $y = \sqrt{1+x^2}\,\log(x + \sqrt{1+x^2})$, доказать, что $y = x + \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{x^7}{7} - \ldots$

165. Доказать, что при условіи $|x| < 1$ имѣемъ $\frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^4 + \ldots$

166. Доказать, что при $|x| < 1$ имѣемъ $\frac{1}{2}\{\log(1+x)\}^2 = \frac{1}{2}x^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{x^3}{4} - \ldots$

167. Доказать, что при $x^2 < 1$ имѣемъ $\log(1+x)\log(1-x) = x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\frac{x^6}{3} + \ldots$

168. Доказать, что при $|x| < 1$ имѣемъ: $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 = \frac{x^2}{2} - \left(1 + \frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{x^6}{6} - \ldots$, сходится ли этотъ рядъ при $x = 1$?

169. Доказать, что $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \log(1+x^2) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\frac{x^5}{5} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)\frac{x^7}{7} - \ldots$, можно ли положить въ этомъ равенствѣ $x = 1$?

170. Доказать, что $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \log\frac{1+x}{1-x} = x^2 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{x^6}{3} + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right)\frac{x^{10}}{5} + \ldots$

171. Доказать, что при $x^2 < 1$ имѣемъ $\log\frac{1 + \sqrt{1-x}}{2} = -\frac{1}{2}\frac{x}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^2}{4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^3}{6} - \ldots$

172. Разложить въ степенной рядъ функцію $y = (\arcsin x)^2$.

Тригонометрическіе ряды.

173. Въ промежуткѣ $(-\pi, +\pi)$ разложить въ рядъ Фурье функцію $f(x) = \cos x$, если $x > 0$ и $f(x) = -\cos x$, если $x < 0$.

174. Въ промежуткѣ $(-\pi, +\pi)$ разложить въ рядъ Фурье функцію $f = |x|^3$ и на основаніи этого разложенія найти суммы рядовъ: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$; $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots$; $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots$

175. Разложить въ рядъ Фурье въ промежуткѣ $(-h, +h)$ функцію e^x.

176. Разложить въ рядъ Фурье въ промежуткѣ $(-\pi, +\pi)$ функцію $\cos ax$.

177. Разложить въ рядъ Фурье въ промежуткѣ $(-\pi, +\pi)$ функцію $\sin ax$.

178. Разложить въ рядъ Фурье въ промежуткѣ $(-\pi, +\pi)$ функцію $\operatorname{sh} ax$.

179. Разложить въ рядъ Фурье въ промежуткѣ $(-\pi, +\pi)$ функцію $\operatorname{ch} ax$.

180. Въ промежуткѣ $(-\pi, +\pi)$ разложить въ рядъ Фурье функцію $f(x) = \log \cos \frac{x}{2}$.

181. Доказать, что въ предѣлахъ отъ 0 до π имѣетъ мѣсто разложеніе

$$\frac{\pi}{2} \sin x = 1 - \frac{2 \cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{2 \cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cos 6x}{5 \cdot 7} - \ldots$$

182. Доказать, что при $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$ имѣемъ $\frac{\pi x}{8}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{x^2}{3}\right) = \sin x - \frac{\sin 3x}{3^4} + \frac{\sin 5x}{5^4} - \ldots$ и на основаніи этого найти сумму ряда $S = 1 - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} - \ldots$

183. Доказать, что при $0 \leqq x \leqq \pi$ имѣетъ мѣсто равенство: $\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots = \frac{\pi}{8} x (\pi - x)$.

184. Доказать, что при $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$ имѣетъ мѣсто равенство:

$$\frac{\cos 3x}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{\cos 5x}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{\cos 7x}{5 \cdot 7 \cdot 9} - \ldots = \frac{\pi}{8} \cos^2 x - \frac{1}{3} \cos x.$$

185. Доказать, что при $0 \leqq \theta \leqq \pi$ имѣетъ мѣсто равенство

$$\frac{\sin 4\theta}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 6\theta}{2 \cdot 3} + \frac{\sin 8\theta}{3 \cdot 4} + \ldots = \sin 2\theta \quad (\pi - 2\theta) \sin^2\theta - \sin \theta \cos \theta \log (4 \sin^2 \theta).$$

166. Доказать, что при $0 \leqq \theta \leqq \pi$ имѣетъ мѣсто равенство:

$$\frac{\cos 4\theta}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 6\theta}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 8\theta}{3 \cdot 4} + \ldots = \cos 2\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sin 2\theta + \sin^2 \theta \log (4 \sin^2 \theta).$$

187. Доказать, что $\frac{\cos 3z}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{\cos 5z}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{\cos 7z}{3^2 \cdot 4^2} + \ldots = 2(\pi - 2z) \sin z + \left(\frac{\pi^2}{3} - 2\pi z + 2z^2 - 3\right) \cos z$ при условіи $0 \leqq z \leqq \pi$.

188. $\frac{\sin 3z}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{\sin 5z}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{\sin 7z}{3^2 \cdot 4^2} - \ldots = \left\{\frac{\pi^2}{6} + 3 - 2z^2\right\} \sin z - 4z \cos z$ при условіи $-\frac{\pi}{2} \leqq z \leqq +\frac{\pi}{2}$

189. Найти сумму ряда $\frac{\sin^2 x}{1^2} + \frac{\sin^2 2x}{2^2} + \frac{\sin^2 3x}{3^2} + \ldots$ при условіи $0 \leqq x \leqq \pi$.

130. Найти сумму ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\theta \sin^2 n\varphi}{n^2}$ при условіяхъ: $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$.

191. Найти сумму ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta \sin^2 n\varphi}{n}$ при условіяхъ $0 < \theta < \pi$; $0 < \varphi < \pi$.

192. Принявъ въ соображеніе, что $\int_0^1 x^{n-1}\, dx = \frac{1}{n}$ $(n > 0)$, суммировать рядъ $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots$

Суммировать ряды.

193. $\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \ldots; \quad 0 < x < 2\pi.$

194. $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$

195. $\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \ldots, \quad 0 < x < \pi.$

196. $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 9x}{9} + \ldots \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

197. $\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 5x}{5} + \frac{\cos 9x}{9} + \ldots; \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

198. $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 - 1}; \quad S' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 - 1}; \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$

Разныя задачи.

199. На основаніи асимптотическаго равенства $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = C + \log n + \varepsilon_n \; (\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0)$ суммировать ряды: 1. $S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$, 2. $S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots$, 3. $S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots$

200 Доказать асимптотическое равенство $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2} C + \log \sqrt{4n} + \varepsilon_n; \; \lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$

201. Доказать асимптотическія равенства: $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{4k-3} = \frac{1}{4} C + \frac{\pi}{8} + \log \sqrt{8k} + \varepsilon_k, \; \lim_{k=\infty} \varepsilon_k = 0$ и $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{4k-1} = \frac{1}{4} C - \frac{\pi}{8} + \log \sqrt{8k} + \delta_k, \; \lim_{k=\infty} \delta_k = 0$

На основаніи результата № 201 найти суммы рядовъ

202. $S = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \ldots$

203 $S = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} - \frac{1}{7} + \ldots$

204. Изъ ряда натуральныхъ чиселъ 1, 2, 3, . . выбираются числа

3, 7, 8, 15, 24, 26, ... (*A*)

которыя по прибавленіи къ нимъ единицы даютъ полную степень

Найти сумму ряда $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \ldots$

205 Изъ ряда (*A*) предыдущей задачи выбираются отдѣльно четныя и нечетныя числа

8, 24, 26, ... (*B*)

3, 7, 15, ... (*C*)

Найти суммы рядовъ: $S = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \ldots$ и $S' = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \ldots$

206. Изъ ряда натуральныхъ чиселъ выбираются числа 5, 9, 10, 17, 26, 28 . . , которыя по вычитаніи изъ нихъ единицы даютъ полную степень. Найти сумму ряда $S = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \ldots$

207. Изъ ряда 5, 9, 10, 17, 26, 28, . . ., происхожденіе котораго выяснено въ № 206 выбираются отдѣльно четныя и нечетныя числа. Найти суммы рядовъ

$S = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \ldots$ и $S' = \frac{1}{10} + \frac{1}{26} + \frac{1}{28} + \ldots$

208. Если положить $\varphi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \ldots$, то

$$\varphi(x) + \varphi(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \log x \log(1-x).$$

209. Если положить $\varphi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \frac{x^4}{4^4} + \ldots$, то

$$\varphi(-x) + \varphi\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\{\log(1+x)\}^2.$$

210. Найти сумму ряда $S = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j j^2}$.

211. Если k цѣлое число $\geqq 1$, то сумма ряда $1 + \frac{2^k}{1.2} + \frac{3^k}{1.2.3} + \frac{4^k}{1.2.3.4} + \ldots$ будетъ равна ep_k, гдѣ p_k цѣлое число. Очевидно, что $p_1 = 1$, числа же $p_2, p_3, \ldots$ опредѣляются послѣдовательно съ помощью равенства

$$p_{k+1} = 1 + kp_1 + \frac{k(k-1)}{1.2} p_2 + \ldots + p_k.$$

212. Если k цѣлое число $\geqq 1$, то сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!} x^n$ будетъ равна $e^x p_k(x)$, гдѣ $p_k(x)$ полиномъ съ цѣлыми коэффиціентами. Вычислить полиномы $p_2(x), p_3(x)$ и найти общую формулу, позволяющую послѣдовательно вычислять эти полиномы.

213. Полагая $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, будемъ имѣть $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \frac{S_n}{n!} = 0$.

214. Полагая $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, будемъ имѣть $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n!} x^n = \frac{1}{4} xe^x (x^3 + 8x^2 + 14x + 4)$.

215. Доказать, что $\frac{1}{3}x + \frac{1.4}{3.6} 2^3 x^2 + \frac{1.4.7}{3.6.9} 3^3 x^3 + \ldots = \frac{x^3 + 18x^2 + 9x}{27(1-x)^{10/3}}$.

216. Найти сумму ряда $S = \frac{a_1}{a_2+\theta} + \frac{a_1}{a_2+\theta} \cdot \frac{a_2}{a_3+\theta} + \frac{a_1}{a_2+\theta} \cdot \frac{a_2}{a_3+\theta} \cdot \frac{a_3}{a_4+\theta} + \ldots$ при условіяхъ: 1. $\theta > 0$; 2. $a_n > 0$ при всякомъ $n = 1, 2, 3, \ldots$; 3. Рядъ $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots$ расходящійся.

217. Найти сумму ряда № 216 въ томъ предположеніи, что рядъ $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots$ сходящійся.

218. Найти сумму ряда $S = \frac{3}{1+3\theta} + \frac{5}{(1+3\theta)(1+5\theta)} + \frac{7}{(1+3\theta)(1+5\theta)(1+7\theta)} + \ldots$; $\theta > 0$.

219. Найти сумму ряда $S = \frac{2}{1+2\theta} + \frac{3}{(1+2\theta)(1+3\theta)} + \frac{4}{(1+2\theta)(1+3\theta)(1+4\theta)} + \ldots$; $\theta > 0$.

220. Найти сумму ряда $S = \frac{1^2}{\theta^2+2^2} + \frac{(1.2)^2}{(\theta^2+2^2)(\theta^2+3^2)} + \frac{(1.2.3)^2}{(\theta^2+2^2)(\theta^2+3^2)(\theta^2+4^2)} + \ldots$.

221. Найти сумму ряда $S = \frac{1^2}{\theta^2+3^2} + \frac{(1.3)^2}{(\theta^2+3^2)(\theta^2+5^2)} + \frac{(1.3.5)^2}{(\theta^2+3^2)(\theta^2+5^2)(\theta^2+7^2)} + \ldots$.

222. Если $p + q = 1$, то $p^\mu + \frac{\mu}{1} p^{\mu-1} q + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} p^{\mu-2} q^2 + \ldots$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n} p^{\mu-n} q^n = \frac{\int_0^p x^{\mu-n-1}(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^{\mu-n-1}(1-x)^n\,dx}; (\mu > n).$$

223. Если положить $\Phi(z) = \frac{z}{1} + \frac{z^3}{1.3} + \frac{z^5}{1.3.5} + \ldots$, то для вычисленія $\Phi(z)$ при большихъ значеніяхъ z можно пользоваться равенствомъ:

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{\frac{z^2}{2}} - \frac{1}{z} + \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{s+1} \frac{1.2.3 \ldots 2s}{2.4.6 \ldots 2s} \frac{1}{z^{2s+1}} + \theta (-1)^{n+1} \frac{1.2.3 \ldots 2n}{2.4.6 \ldots 2n} \frac{1}{z^{2n+1}};\ 0 < \theta < 1.$$

224. Доказать справедливость слѣдующаго равенства: $\frac{z}{1} + \frac{z^{p+1}}{1.(p+1)} +$

$$+ \frac{z^{2p+1}}{1.(p+1)(2p+1)} + \ldots = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{p} e^{z^p} - \frac{1}{z^{p-1}} + \frac{p-1}{z^{2p-1}} - \frac{(p-1)(2p-1)}{z^{3p-1}} + \ldots$$

$$+ (-1)^n \frac{(p-1)(2p-1)\ldots((n-1)p-1)}{z^{np-1}} + (-1)^{n+1} \theta \frac{(p-1)(2p-1)\ldots(np-1)}{z^{(n+1)p-1}},\quad 0 < \theta < 1.$$

225. Найти суммы рядовъ:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n^2+a^2)} \quad \Big|\ 0 < x < 2\pi$$

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n(n^2+a^2)} \quad \Big|\ -\pi \leqq x < +\pi.$$

226 Найти суммы рядовъ:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+a^2},\quad (0 < x \leqq 2\pi)$$

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2+a^2};\quad (-\pi \leqq x \leqq \pi).$$

227. Найти суммы рядовъ. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2+n^2}$; $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2+(2n-1)^2}$. См. № 226.

228. Найти суммы рядовъ $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2+n^2)^2}$; $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2+(2n-1)^2)^2}$.

229. Суммировать ряды $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n(n^4+4)}$, $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^4+4}$.

230. Найти сумму ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+x^4}$.

231. Доказать, что $\pi = 16 \sum_{n=1,3,5} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n(n^4+4)}$.

232. Положимъ $\Phi(y) = \frac{y}{1^2+y^2} + \frac{y}{2^2+y^2} + \frac{y}{3^2+y^2} + \ldots$, доказать, что

$$\lim_{y=+\infty} \Phi(y) = \frac{\pi}{4}$$

233. Предположимъ, что данъ знакоперемѣнный рядъ $S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots$, удовлетворяющій слѣдующимъ условіямъ: $u_n > 0$; $u_n > u_{n+1}$; $u_n - u_{n+1} > u_{n+1} - u_{n+2}$ при всѣхъ $n \geqq 0$. Требуется доказать, что $\frac{1}{2} u_0 < S < \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{2}(u_0 - u_1)$.

234. На основаніи предыдущей задачи доказать, что

$$\lim_{x=1} \left\{ \frac{x}{1+x} - \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} - \ldots \right\} = \frac{1}{4}.$$

235. Доказать слѣдующее предложеніе если $p > 0$, то
$\lim\limits_{x=1-0} (1-x)^p (1^{p-1} + 2^{p-1} x + 3^{p-1} x^2 + \ldots) = \Gamma(p)$.

236. Доказать слѣдующее предложеніе: если $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = \alpha$, то
$\lim\limits_{x=1} (1-x)^p (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots) = \alpha\, \Gamma(p)$. См. № 235.

237 Доказать слѣдующее предложеніе: если $\lim\limits_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n^p} = \alpha$, то
$\lim\limits_{x=1} (1-x)^p (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots) = \alpha\, \Gamma(p+1)$ См № 236.

238. Доказать, что $\lim\limits_{x=1} \sqrt{1-x}\,(x + x^4 + x^9 + x^{16} + \ldots) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. См. № 237.

239 Доказать, что $\lim\limits_{x=1} (x - x^4 + x^9 - x^{16} + \ldots) = \frac{1}{2}$. См. № 237

240. Доказать равенство

$$\lim \frac{n}{m+p} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{m+2p} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{m+3p} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{m+np} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot p^n}{m(m+1)\ldots(m+pn)},$$

$m > 0$, $p > 0$, n цѣлое число > 0.

241. Предполагая $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{4}$, доказать равенство $\frac{1}{n} - \frac{tg^2\theta}{n+2} + \frac{tg^4\theta}{n+4} - \ldots = \frac{1}{n} - \frac{\sin^2\theta}{n+2} + \frac{2\sin^4\theta}{(n+2)(n+4)} - \frac{2 \cdot 4 \sin^6\theta}{(n+2)(n+4)(n+6)} + \ldots$

242. Суммировать рядъ $S = arctg\,\frac{x}{1} - arctg\,\frac{x}{3} + arctg\,\frac{x}{5} - \ldots$

243. Суммировать рядъ $S = arctg\,\frac{x^2}{1^2} + arctg\,\frac{x^2}{2^2} + arctg\,\frac{x^2}{3^2} + \ldots$

244. Суммировать рядъ $S = arctg\,\frac{x^2}{1^2} - arctg\,\frac{x^2}{2^2} + arctg\,\frac{x^2}{3^2} - \ldots$

245. Доказать равенство $\pi = 4n\left\{\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n^2}\right\} - \frac{4\pi}{e^{2n\pi}-1} + \frac{1}{n} + 16n^3 \int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{(x^4+4n^4)(e^{2\pi x}-1)}$ и вывести отсюда слѣдующее выраженіе для π.

$$\pi = 4n\left\{\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n^2}\right\} - \frac{4\pi}{e^{2n\pi}-1} + \frac{1}{n} + \frac{B_1}{1 \cdot n^2} - \frac{B_3}{2^2 \cdot 3 \cdot n^6} + \frac{B_5}{2^3 \cdot 5 \cdot n^{10}} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{B_{2k-1}}{2^{2k-2}(2k-1)\, n^{4k-2}} + (-1)^k \frac{\theta B_{2k+1}}{2^{2k}(2k+1)\, n^{4k+2}};$$

$0 < \theta < 1$. Здѣсь черезъ B_1, B_3, . обозначены числа Бернулли. $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_3 = \frac{1}{42}$; $B_5 = \frac{5}{66}$, . . . См. № 63 и № 128 отдѣла X.

ОТДѢЛЪ XII.

Приближенныя вычисленія.

Интерполированіе.

1 Найти цѣлую функцію отъ x, по возможности низшей степени, принимающую при $x = 2, 4, 5, 10$ соотвѣтственно значенія 3, 7, 9, 19.

2. Найти цѣлую функцію отъ x, по возможности низшей степени, принимающую при $x = 2, 4, 5, 10, 15$ соотвѣтственно значенія 3, 7, 9, 19, 0.

3. Найти цѣлую функцію отъ x, по возможности низшей степени, принимающую при $x = 1, 2, 3, 4, 5$ соотвѣтственно значенія 2, 1, -1, 5, 0.

4. Для функціи $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 7$ при $x = 0$ вычислены значенія разностей $\Delta y_0 = +3$, $\Delta^2 y_0 = 0$, $\Delta^3 y_0 = 6$, соотвѣтствующія приращенію $h = 1$ аргумента. Требуется вычислить разности Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, соотвѣтствующія приращенію $h_1 = \frac{1}{10}$ аргумента.

5. Для функціи $y = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 1$ при $x = 0$ вычислены разности $\Delta y_0 = 4$; $\Delta^2 y_0 = 28$, $\Delta^3 y_0 = 66$, $\Delta^4 y_0 = 48$, соотвѣтствующія приращенію аргумента $h = 1$. Требуется вычислить разности Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_0$, соотвѣтствующія приращенію аргумента $h_1 = \frac{1}{10}$.

6 Пользуясь заданіями $lg\,1000 = 3$, $\Delta lg\,x = 0{,}00043407709$, $\Delta^2 lg\,x = -0{,}00000043343000$ $\Delta^3 lg\,x = 0{,}000000000864700$, $\Delta^4 lg\,x = -0{,}000000000002585$ составить таблицу значеній логариѳмовъ и ихъ разностей до значенія логариѳма 1010. Опредѣлить съ какой точностью вычисленъ $lg\,1010$.

7. Пользуясь таблицей

	$log\,x$	$10^{10}\,\Delta\,log\,x$	$10^{10}\,\Delta^2 log\,x$
1005	3,002166059	4319184,7	−4291,3
1006	3,002597978	4314893,4	4282,8

вычислить log 1005,237, опредѣливъ точность вычисленій.

Указаніе: $\left|\frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right| < \frac{1}{10}$ при $0 < x < 1$. Числа таблицы даны съ точностью до $\frac{1}{2}$ послѣдняго знака.

8. Пользуясь таблицей задачи № 7, найти log 1005,237437

9. Пользуясь таблицей задачи № 7, найти x по данному $log\,x = 3{,}002268651$.

10. Пользуясь таблицей задачи № 7, найти x изъ уравненія $log\,x = 3{,}002268462$.

11. Пользуясь таблицей

u	$\log sh\, u$	$10^5 \Delta \log sh\, u$	$\log ch\, u$	$10^5 \Delta \log ch\, u$
0.500	9.71692	94.0	0.05217	20.1
0.501	9.71786	93.8	0.05237	20.1
0.502	9.71879	93.7	0.05257	20.1
0.503	9.71973	93.5	0.05277	20.2
0.504	9.72066	93.3	0.05297	20.2

найти $sh\ 0.50235$.

12. Найти корень уравнения $ch\, u = 1{,}1287$. См. таблицу задачи № 11.

13. При помощи данныхъ

x	$\sin x$
41°	0,6560590290
42°	0,6691306064
43°	0,6819983601
44°	0,6946583705

вычислить съ возможною точностью $\sin 41°20'$.

14. По даннымъ

φ	$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$
21°.0	0.370 6544
21°.5	0.379 6626
22°.0	0.388 7052
22°.5	0.397 7625

вычислить $F(\varphi)$ при $\varphi = 21°15'$.

15. По даннымъ

φ	$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$
28°.0	0.49846 361
28°.5	0.50772 435
29°.0	0.51700 422
29°.5	0.52630 357

вычислить корень уравнения $F(\varphi) = 0.5$.

16. По даннымъ

x	$\psi(x) = \frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx}$
0.71	0.21645 01462
0.72	0.22429 28871
0.73	0.23207 69593
0.74	0.23980 32061

вычислить $\psi(0.715)$. Для оцѣнки погрѣшности слѣдуетъ принять въ соображеніе, что $\psi'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} +$

17. По даннымъ

x	$\psi(x) = \frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx}$
0.83	0.30686 12
0.84	0.31405 89
0.85	0.32120 00
0.86	0.32829 29

вычислить корень уравненія $\psi(x) = 0.31$

18. По даннымъ

x	$\psi(x) = \frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx}$
0.90	0.35618 41611 64
0.91	0.36304 10646 49
0.92	0.36985 27 244 06
0.93	0.37661 97179 23
0.94	0.38334 26119 47

вычислить $\frac{d^2 \log \Gamma(1+x)}{dx^2}$ при $x = 0.90$.

19. По даннымъ

φ	$E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi}\, d\varphi$
45°	0.76719 59357
46°	0.78350 16779
47°	0.79976 65910
48°	0.81599 069.3
49°	0.83217 40189
50°	0.84831 66279

вычислить $\frac{d E(\varphi)}{d\varphi}$ при $\varphi = 45°$.

20. По даннымъ

x	$\log_{10} \Gamma(1+x)$
0.715	1,959788 422669
0.716	1,959884 302271
0.717	$\overline{1}$,959980 522220
0.718	1,960077 082261

вычислить $\frac{d \log \Gamma(1+x)}{dx}$ при $x = 0.715$.

Приближенное вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ.

Вычислить по способу трапецій интегралы, принимая указанное въ каждой задачѣ число промежутковъ m:

21. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$, $m = 8$.

22. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{5x^2+4}}$, $m = 10$.

23. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{4x^2+3}}$, $m = 10$.

Вычислить по способу Симпсона интегралы, принимая указанное въ каждой задачѣ число промежутковъ m.

24. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$; $m = 8$.

25. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; $m = 8$.

26. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$; $m = 8$.

27. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{5x^2+4}}$, $m = 10$.

28 $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{4x^2+3}}$, $m = 10$.

29. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$, $m = 10$.

30. $\int_0^1 \frac{x^2+4}{x^2+4x+5}\,dx$; $m = 10$.

31. $\int_1^2 x \log x\,dx$; $m = 4$.

32. $\int_1^2 \frac{\log x}{x}\,dx$; $m = 6$.

33. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$; $m = 6$

34. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$; $m = 4$.

Вычислить по способу Котеса интегралы принимая указанное число ординатъ m.

35. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$; $m = 8$.

36. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{x^4+1}$; $m = 4$.

37. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\log(x+1)}$; $m = 6$.

38. $\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$; $m = 5$.

Вычислить по способу Чебышева интегралы, принимая указанное число ординат m:

39. $\int\limits_{1000}^{1010} \frac{dx}{x}$; $m = 2$.

40. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; $m = 3$.

41. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg\, x}{x}\, dx$; $m = 3$ и $m = 4$.

42. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} log_{10} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) d\varphi$, $m = 5$.

43. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + x}\, dx$; $m = 4$.

44. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{5}{4}}\, dx$; $m = 5$.

Вычислить по способу Гаусса интегралы, принимая указанное число ординат m:

45. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1 + x}$, $m = 5$.

45. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2\, dx}{1 + x^4}$, $m = 4$.

47. $\int\limits_{0}^{1} \frac{log\,(1 + x)}{x}\, dx$; $m = 4$.

48. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg\, x}{x}\, dx$, $m = 4$.

49. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$; $m = 4$.

50. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} log_{10} \left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) d\varphi$, $m = 4$.

51. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\, dx}{log\,(x + 1)}$, $m = 4$.

52. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}\, d\varphi$, $m = 3$.

53. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + x}\, dx$; $m = 4$.

54. $\int\limits_{0}^{1} \frac{log\,(1 + x)}{1 + x^2}\, dx$; $m = 5$.

55. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{\sin^2 x}\, dx$; $m = 5$.

Приложенія формулы Эйлера-Маклорена.

56. Опредѣлить число знаковъ въ числѣ $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 99$ ($log\, e = 0{,}43429 \ldots$).

57. На основаніи формулы Эйлера доказать, что $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} = C + log\, x + \frac{1}{2x} - \frac{A_2}{x^2} - \frac{3 \cdot A_4}{x^4} - \ldots - \frac{(2k - 3) \cdot A_{2k-2}}{x^{2k-2}} - \theta\, \frac{(2k - 1) \cdot A_{2k}}{x^{2k}}$ $(0 < \theta < 1)$, гдѣ C нѣкоторое постоянное. Полагая $x = 10$, вычислить C съ точн. до $\frac{1}{2 \cdot 10^6}$; $A_2 = \frac{1}{12}$, $A_4 = \frac{1}{720}$; $A_6 = \frac{1}{30240}$.

58. Вычислить съ точностью до 0,001 сумму $\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{99}$.

Примѣчаніе. Модуль обыкновенныхъ логариѳмовъ съ достаточной точностью данъ въ логариѳмическихъ таблицахъ.

59. Вычислить сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1000000}$ съ точн. до $\frac{1}{2 \cdot 10^{10}}$; $C = 0{,}5772\,1566\,4901 \ldots$

60. На основаніи формулы Эйлера доказать равенство $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x}} = C + 2\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{A_2}{2x^{3/2}} - \frac{1.3.5}{2^3}\frac{A_4}{x^{7/2}} \ldots \frac{1.3.5\ldots(4k-3)}{2^{2k-1}}\frac{A_{2k}}{x^{\frac{4k-1}{2}}} - \theta\frac{1.3.5\ldots(4k+1)}{2^{2k+1}}\frac{A_{2k+2}}{x^{\frac{4k+3}{2}}}$, $(0 < \theta < 1)$. Вычислить постоянное C съ точн. до $\frac{1}{2.10^6}$, полагая $x = 4$.

61. Въ равенствѣ

$$\frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \ldots + \frac{\log n}{n} = C + \frac{1}{2}(\log n)^2 + \frac{\log n}{2n} - \frac{\log n}{12n^2} - \frac{1}{6} + \theta\frac{6\log n}{7.20n^4} - \frac{11}{7.20n^4}; \ (0<\theta<1)$$

вычислить постоянную C съ точностью до $\frac{1}{2.10^6}$

62. Вычислить сумму ряда $s = \frac{\log 2}{2} - \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 4}{4} - \ldots$ съ точностью до $\frac{1}{10^5}$.

63. На основаніи равенства

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \theta.\frac{1}{42n^7} \quad 0 < \theta < 1$$

вычислить $\frac{\pi^2}{6}$ съ точностью до $\frac{1}{2.10^7}$.

64. Вычислить съ точностью до 0,000001 сумму ряда

$$x = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \ldots$$

65 Вычислить сумму s ряда $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots$ на основаніи равенства

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} = s - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} - \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{12n^6} - \frac{\theta}{12n^8} \quad (0 < \theta < 1).$$

съ точностью до $\frac{1}{2.10^8}$.

66. При помощи формулы Эйлера вычислить сумму ряда $s = \frac{\log 2}{2^2} + \frac{\log 3}{3^2} + \frac{\log 4}{4^2} + \ldots$ съ точн. до $\frac{1}{2.10^7}$.

67 Вычислить сумму ряда $s' = \frac{\log 2}{2^2} - \frac{\log 3}{3^2} + \frac{\log 4}{4^2} \ldots$ съ точностью до $\frac{1}{10^7}$ См № 66.

68 Вычислить съ точн. до $\frac{1}{10^5}$ сумму ряда $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ См № 60.

Вычисленіе суммъ медленно сходящихся рядовъ.

69. Преобразованіе Эйлера (A) Данъ сходящійся рядъ $u_0 - u_1 + u_2 - \ldots$ имѣющій сумму s. Требуется доказать слѣдующія утвержденія.

1° Рядъ $\Delta^p u_0 - \Delta^p u_1 + \Delta^p u_2 - \ldots$ сходящійся при всякомъ p.

2° Число $\frac{\Delta^p u_0 - \Delta^p u_1 + \ldots}{2^p}$ имѣетъ предѣломъ 0 при безконечномъ возрастаніи p.

3° Рядъ $\frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{4}\Delta u_0 + \frac{1}{8}\Delta^2 u_0 - \ldots + \frac{(-1)^{p-1}}{2^p}\Delta^{p-1}u_0 + \ldots$ сходящійся и имѣетъ сумму s.

4° Если числа $(-1)^i\Delta^i u_0$ одного знака и убываютъ съ возрастаніемъ i, то

$$s = \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{4}\Delta u_0 + \frac{1}{8}\Delta^2 u_0 - \ldots + \frac{(-1)^{p-1}}{2^p}\Delta^{p-1}u_0 + \theta\frac{(-1)^p}{2^p}\Delta^p u_0, \text{ гдѣ } \frac{1}{2} < \theta < 1.$$

Указаніе. при обозначеніи $s_0 = u_0$, $s_1 = u_0 - u_1$; $s_2 = u_0 - u_1 + u_2, \ldots$ имѣемъ

$$R_p = \Delta^p u_0 - \Delta^p u_1 + \ldots - (-1)^p \left(s - \frac{p s_0 + \frac{p(p-1)}{2} s_1 + \ldots + s_p}{1 + p + \frac{p(p-1)}{2} + \ldots + 1} \right),$$ откуда

по извѣстной теоремѣ Cesàro заключаемъ $\lim\limits_{p=\infty} R_p = 0$.

70. Преобразованіе Эйлера (*B*). Данъ рядъ $s = u_0 x - u_1 x^2 + u_2 x^3 - \ldots$ сходящійся въ области $-1 < x < 1$. Доказать въ предположеніи $x > 0$, что рядъ $u_0 \frac{x}{1+x} - \Delta u_0 \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \Delta^2 u_0 \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \ldots$ сходящійся, имѣющій сумму s. Сверхъ того, если числа $(-1)^i \Delta^i u_0$ одного знака и убывають съ возрастаніемъ i, то

$$s = u_0 \frac{x}{1+x} - \Delta u_0 \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \ldots + (-1)^{p-1} \Delta^{p-1} u_0 \left(\frac{x}{1+x}\right)^p + \theta (-1)^p \Delta^p u_0 \frac{x^{p+1}}{(1+x)^p},$$

гдѣ $\frac{1}{1+x} < \theta < 1$.

Указаніе труднѣе всего доказать, что $\lim\limits_{p=\infty} \frac{x^{p+1} \Delta^p u_0 - x^{p+2} \Delta^p u_1 + \ldots}{(1+x)^p} = 0$

Доказательство этого утвержденія получается на основаніи теоремы Cesàro съ помощью разсужденій, аналогичныхъ указаннымъ въ предыдущей задачѣ.

71. При помощи преобразованія Эйлера доказать равенство

$$\frac{x}{m} - \frac{x^2}{m+1} + \frac{x^3}{m+2} - \ldots = \frac{1}{m} \frac{x}{1+x} + \frac{1}{m(m+1)} \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1 \cdot 2}{m(m+1)(m+2)} \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots$$

при $x > \frac{1}{2}$

72. При помощи преобразованія Эйлера доказать равенство

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \ldots\right),$$ исходя изъ извѣстнаго ряда $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ Принимая во вниманіе, что $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$, вычислить π съ точностью до $\frac{1}{10^8}$

73. Примѣнивъ преобразованіе Эйлера къ ряду $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ вычислить его сумму съ точн. до $\frac{1}{10^6}$.

74. Примѣнивъ къ ряду $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ преобразованіе Эйлера, вычислить его сумму съ точн. до $\frac{1}{10^5}$.

75. Примѣнивъ преобразованіе Эйлера къ ряду $s = \frac{2}{3} - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} - \ldots$, вычислить его сумму съ точн. до $\frac{1}{10^5}$.

76. Примѣнивъ преобразованіе Эйлера къ ряду $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots$, вычислить его сумму съ точн. до $\frac{1}{10^5}$.

77. Примѣнивъ преобразованіе Эйлера къ ряду $s = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots$, вычислить его сумму съ точностью до $\frac{1}{10^5}$.

78. Примѣнивъ преобразованіе Эйлера къ ряду $s = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots$, вычислить его сумму съ точн. до $\frac{1}{10^4}$.

79. Примѣнивъ къ ряду $s = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \ldots$ преобразованіе Эйлера, вычислить его сумму съ точн. до $\frac{1}{10^5}$.

80. Примѣнивъ къ ряду $s = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} - \ldots$ преобразованіе Эйлера, вычислить его сумму съ точн. до $\frac{1}{10^6}$.

81. Примѣнивъ преобразованіе Эйлера къ ряду $s = \frac{1}{\log 10} - \frac{1}{\log 11} + \frac{1}{\log 12} - \ldots$, вычислить его сумму съ точн. до $\frac{1}{10^6}$.

Въ дальнѣйшемъ даются примѣры на примѣненіе преобразованія Куммера. Это преобразованіе основано на слѣдующемъ принципѣ: *если для сходящагося ряда $s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ можно найти послѣдовательность чиселъ $P_1, P_2, P_3, \ldots$, удовлетворяющихъ условіямъ:* 1° $\lim_{n=\infty} P_n u_n = 0$,

$$2^\circ \lim_{n=\infty} \left\{ P_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - P_{n+1} \right\} = 1,$$

то рядъ $(P_1 + 1) u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda_n) u_{n+1}$, *гдѣ* $\lambda_n = P_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - P_{n+1}$, *будетъ сходящимся и будетъ имѣть ту-же сумму, какъ данный рядъ* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$.

Относительно пріемовъ для опредѣленія чиселъ P_n мы не имѣемъ возможности говорить здѣсь; поэтому интересующихся мы отсылаемъ напр. къ сочиненію Бертрана: «Traité de Calcul differentiel et de Calcul intégral» t. I (Paris 1864).

82. При помощи преобразованія Куммера вывести рядъ $\pi^2 = 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 (n+1)^3}$ изъ ряда $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$, взявъ P_n въ формѣ $c_{-1} n + c_0 + \frac{a}{n+b}$.

83. Вывести рядъ $\pi^2 = \frac{2071}{210} + \frac{27}{35} \frac{16}{} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \frac{1}{(n+1)^3 n^3 (n+2)^3}$ преобразованіемъ Куммера изъ ряда задачи № 82, беря P_n въ формѣ $P_n = c_{-1} n + c_0 + \frac{a}{n+b}$. Вычислить на основаніи найденнаго ряда π^2 съ точн. до $\frac{1}{10^{10}}$.

84. Вывести рядъ $\frac{3\pi^2}{32} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^3}$ съ помощью преобразованія Куммера изъ ряда $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$.

85. При помощи преобразованія Куммера вывести равенство $\frac{\pi^2}{4} = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2.4.6}{3.5.7} \cdot \frac{1}{4} + \ldots = \frac{112}{45} - \frac{24}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)\, n^2 (n+1)(7n-1)(7n+6)}$.

86. При помощи преобразованія Куммера вывести равенство $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 + \ldots = \frac{39}{28} + \frac{18}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\right\}^3 \frac{4n+3}{(2n+1)^3 (4n^2+2n+1)(4n^2+10n+7)}$ и вычислить сумму ряда, стоящаго слѣва, съ точн. до $\frac{1}{10^7}$.

87. При помощи преобразованія Куммера вывести рядъ $\frac{\pi}{2} = \frac{2688}{1710} - \frac{3.2^7}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2).(2n+3)(2n+1)^2(14n+5)(14n+19)}$ изъ ряда $\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} + \ldots$

88. Преобразованіемъ Куммера вывести равенство

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots=\frac{5}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{4n^4(n+1)^4},$$ беря P_n въ формѣ $P_n=c_{-1}n+c_0+\frac{a}{n+b}$.

Вычислить сумму ряда $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots$ съ точн. до $\frac{1}{10^5}$

89. При помощи преобразованія Куммера доказать равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+n^2}=\frac{2a^2+5}{3(a^2+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4a^2+1)(a^2+1)}{6n(n+1)(a^2+n^2)(a^2+(n+1)^2)}$$

и вычислить при $a=2$ сумму стоящаго слѣва ряда съ точн. до $\frac{1}{10^4}$.

90 При помощи преобразованія Куммера доказать равенства

$$e=2+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n^4+n^2+1)};\quad e=3-6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n^3+2n-1)(n^3+3n^2+5n+2)}$$

и вычислить e съ точн. до $\frac{1}{10^{10}}$.

91. При помощи преобразованія Куммера доказать равенства

$$\log 2=\frac{3}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2(n+1)^2};\quad \log 2=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(2n^2+1)(2n^2+4n+3)},$$

исходя изъ ряда $\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

92. Примѣнивъ преобразованіе Куммера къ ряду $\log 2=\frac{3}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2(n+1)^2}$,

вывести рядъ $\log 2=\frac{65}{96}+\frac{9}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)n^2(n+2)^2}$ и вычислить $\log 2$ съ точн. до $\frac{1}{10^{10}}$

93. При помощи преобразованія Куммера доказать равенства

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)^2}$$

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots=\frac{2}{3}+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)(16n^4+8n^2+9)}$$

94. Примѣнивъ преобразованіе Куммера къ ряду $\frac{\pi}{4}=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)^2}$, вывести слѣдующіе ряды

$$\frac{\pi}{4}=\frac{4}{3}+24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(4n-1)^2(4n^2-9)},\quad \frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}+18\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(2n+1)(2n-1)^2(2n+3)^2}$$

95. При помощи преобразованія Куммера доказать слѣдующее равенство

$$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\ldots=\frac{3}{2}-16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(4n^2-1)^3}$$

96. При помощи преобразованія Куммера доказать равенство

$$1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{7}{10}+128\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(4n^2-1)^2(16n^4+24n^2+25)}$$

и вычислить сумму ряда, стоящаго слѣва, съ точн. до $\frac{1}{10^4}$.

97. Преобразованіемъ Куммера доказать равенство

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 +$$

$$\frac{6}{10} + 27\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \frac{4n-1}{(2n-1)^2(8n^2-12n+9)(8n^2+4n+5)}$$

и вычислить сумму ряда, стоящаго слѣва, съ точн. до $\frac{1}{10^5}$.

98. При помощи преобразованія Куммера доказать слѣдующее равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)} = 1 + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\log\frac{1}{1-x} -$$

$$- \frac{x(3-2x)}{6(1-x)} - \frac{6}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n\{(1-x)n+x+2\}\{(1-x)n+3\}(n+1)(n+2)}, \quad -1 \leqq x < 1.$$

Вычислить лѣвую часть этого равенства при $x = \frac{1}{4}$ съ точн. до $\frac{1}{10^5}$.

99. Преобразованіемъ Куммера доказать равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nz^n} = \frac{2z-1}{2z(z-1)} - \frac{2z^2}{z-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\{(z-1)n+z+1\}\{(z-1)n+2z\}z^{n+1}}, \quad (z^2 > 1).$$

Вычислить при $z = 4$ сумму даннаго ряда съ точн. до $\frac{1}{10^7}$.

100. Преобразованіемъ Куммера доказать равенство

$$\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n} = \frac{3}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-2}n(n+1)(n+3)(n+4)}$$

101. При помощи преобразованія Куммера вывести слѣдующіе результаты:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2} = \frac{7}{11} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{46n+11}{n^2(n+1)^2(2n+9)(2n+11).2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n.n^2} = \frac{3}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-5}{n(n+4)(n+5)(n+1)^2 2^n}$$

Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2}$ съ точн. до $\frac{1}{10^6}$.

102. Доказать равенство $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(2n+1)} = \frac{5}{4} + 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{n!(2n+1)(2n^2-n+3)(2n^2+3n+4)}$

и вычислить сумму стоящаго слѣва ряда съ точн. до $\frac{1}{2\cdot 10^7}$.

Вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ черезъ разложенія въ ряды.

103. Вычислить интегралъ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$ при помощи разложенія въ рядъ съ точностью до $\frac{1}{10^3}$.

104. Вычислить интегралъ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ съ точн. до $\frac{1}{10^3}$.

105. При помощи разложенія въ рядъ вычислить $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ съ точн до $\frac{1}{10^6}$.

106 При помощи разложенія въ рядъ вычислить $\int_0^1 x^x\,dx$ съ точн. до $\frac{1}{2\cdot 10^7}$

107 Вычислить интегралъ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\,dx$ при помощи разложенія въ рядъ съ точн. до $\frac{1}{10^6}$. *Указаніе*: положить $x = 2\,arctg\,z$.

108. Доказать равенство $\int_0^1 e^{x^2}\,dx = \frac{5}{4} + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n!\,(2n+1)\,(2n^2+n+3)\,(2n^2+3n+4)}$ и вычислить стоящій слѣва интегралъ съ точн. до $\frac{1}{2\cdot 10^7}$.

109. Доказать равенство $\int_0^1 e^{x^3}\,dx = \frac{7}{6} + 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+7}{(3n+1)\,(3n^2+2n+5)\,(3n^2+4n+6)\,n!}$ и вычислить интегралъ съ точн. до $\frac{1}{10^6}$

110. Вычислить интегралъ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ съ точностью до $\frac{1}{10^5}$ при помощи разложенія въ рядъ и примѣненія къ этому ряду преобразованія Эйлера.

111. Вычислить интегралъ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$ съ точн. до $\frac{1}{10^6}$ при помощи разложенія въ рядъ и примѣненія къ этому ряду преобразованія Эйлера.

112. Вычислить интегралъ $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\log(x+1)}$ съ точн. до $\frac{1}{10^5}$. *Указаніе*: положить $x+1 = e^t$.

Рѣшеніе численныхъ уравненій.

Вычислить по способу Граффе корни уравненій

113. $x^3 - 1{,}74x^2 - 2{,}52x + 3{,}97 = 0$.

114. $7x^5 + 5{,}47x^2 - 3{,}33x^2 - 1{,}72x + 0{,}15 = 0$.

115. $3{,}22x^5 + 4{,}12x^4 + 3{,}11x^3 - 7{,}25x^2 + 1{,}88x - 7{,}84 = 0$.

116. $x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$.

117. $x^4 + 4{,}002x^3 + 14{,}01801x^2 + 20{,}03802x + 25{,}07005 = 0$.

118. $x^8 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{27}{40}x^4 - \frac{57}{560}x^5 + \frac{53}{22400} = 0$.

119 $x^5 - x^4 - 3x^3 + 2x + 5 = 0$.

Вычисленіе корней трансцендентныхъ уравненій.

120. Вычислить корень уравненія: $x\log x = 100$ съ точн. до $\frac{1}{10^7}$

121. Вычислить корень уравненія: $x = \cos x$ съ точн. до $\frac{1}{10^8}$.

122. Вычислить наименьшій положительный корень уравненія $x = tg\,x$ съ точн. до $\frac{1}{10^9}$.

123. Вычислить наименьшій положительный корень уравненія $(4-3x^2)\sin x - 4x\cos x = 0$ съ точн. до $\frac{1}{10^5}$.

124. Вычислить наименьшій положительный корень уравненія $ch\,x\cos x + 1$ съ точн. до $\frac{1}{10^6}$.

125. Вычислить наименьшій положительный корень уравненія $ch\,x\cos x + 1 = 0$ съ точн. до $\frac{1}{10^3}$.

126. Вычислить наименьшій положительный корень уравненія:

$$1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^5}{(1\,.\,2)^2} - \frac{x^3}{(1\,.\,2\,.\,3)^2} + \frac{x^4}{(1\,.\,2\,.\,3\,.\,4)^2} - \ldots = 0$$ съ точн. до $\frac{1}{10^4}$

127. Вычислить наименьшій положительный корень уравненія:

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3\,.\,2^2} - \frac{x^3}{4\,.\,(2\,.\,3)^2} + \frac{x^4}{5\,(2\,.\,3\,.\,4)^2} \ldots = 0$$ съ точн. до $\frac{1}{10^4}$.

ОТВѢТЫ.

ОТДѢЛЪ I.

1. 1.

2. $x(x_2 - x_1) + y(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}\{x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2\}$

3. $x^2 + y^2 - xy - x - y = 3$.

4. Уравненіе кривой: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{5})^2$.

5. $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$.

6. $\left(\frac{21}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

7. $C_1\left(\frac{[illegible]}{11}, \frac{39}{11}\right)$, $C_2\left(\frac{22}{3}, -\frac{79}{8}\right)$.

8. $M_1(2, -2)$.

9. $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

10. $(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2)$.

11. $y^2 = 2px$.

12. $AD = \sqrt{2}$, $\cos(AD, OC) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

13. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$.

14. $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} y_1$, $y = 1 - x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} y_1$.

15. $x = -x_1 + \frac{y_1}{2}$, $y = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} y_1$

16. $x = \frac{a}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}(x' - y')$
$y = \frac{a}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}(x' + 2y')$

17. $x_1^2 + 4y_1^2 = 1$.

18. $x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2$.

19. $x_1 y_1 = \frac{a^2 + b^2}{4}$.

20. $x_1 y_1 = \frac{1}{2}$ (если старую ось ординатъ повернуть еще на 45° въ сторону обратную движенію часовой стрѣлки).

21. Если $A(a, o)$ и $B(b, o)$, то $(x-a)^2 + y^2 = [(x-b)^2 + y^2]\sin^2\alpha$

22. $\theta = 120°$ или $\theta = 240°$.

23. $x_1 y_1 = a^2$.

24. $x + 3y - 5 = 0$.

25. $y = 1$.

26. $3x - y - 4 = 0$, $3x + 2y - 1 = 0$, $3x + 5y + 34 = 0$.

27. $\delta = \frac{1}{8}$, $\alpha - \beta = 60°$.

28. $y - 1 = (1 + \sqrt{3})(x - 2)$; $y - 1 = (1 - \sqrt{3})(x - 2)$.

29. $y - 4 = 18(x - 3)$; $y - 4 = -\frac{4}{3}(x - 3)$.

30. $4x + 3y = 25$.

31. $y - 2 = \left(\frac{-6 \pm \sqrt{21}}{6}\right)(x + 1)$.

32. $4x + y - 6 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$.

33. 2

34. $\frac{5}{2}$.

36. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

37. Равнобедренный прямоугольный треугольникъ съ вершиной въ M_2

38. $y - 5 = \frac{1}{5}(x - 3)$, $y - 5 = -5(x - 3)$.

39. $6x + 4y - 3 = 0$.
40. $4x + 3y + 16 = 0$, $4x + 3y - 14 = 0$.
41. $2x + 3y - 6 = 0$.
42. $9x + 12y + 20 = 0$, $5x - 12y + 36 = 0$.
43. $2x + 4y - 3 = 0$.
44. $x + 2y - 11 = 0$, $2x + y - 5 = 0$.
45. Предполагая оси прямоугольными: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 17 = 0$.
46. $P(a, 0)$, $a = 7 \pm \sqrt{10}$.
47 *a)* $x - y - 1 = 0$, *b)* $x = 2$, *c)* $x + 2y - 4 = 0$.
48. Такой точки на конечномъ разстояніи нѣтъ.
49. $x^2 + y^2 - 5x - 6y + 9 = 0$.
50. Центръ круга находится въ точкѣ $\left(5, \frac{5}{2}\right)$.
51 $7x^2 + 7y^2 - 15x + 5y - 70 = 0$.
52. Двѣ точки $(0, +1)$ и $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$
53. $x_0 = 2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{5}$, $y_0 = -3 + \frac{2}{3}\sqrt{5}$.
54. $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 3x + 2y - 7 = 0 \\ 17x + 2y + 21 = 0 \end{cases}$
55. $\begin{cases} y - 4x + 7 = 0 \\ 3y + x - 31 = 0 \\ 5y + x - 7 = 0 \end{cases}$.
56. $3x + y - 25 = 0$, $x - 3y - 15 = 0$, $2x - y = 0$.
57. $x - y + 3 = 0$.
58. $y - 1 = (2 + \sqrt{3})(x - 1)$.
59. $(5 - 6\sqrt{3})x + (6 + 5\sqrt{3})y + 25\sqrt{3} - 31 = 0$.
60. $x - 1 = 0$ и $y - 2 = 0$.
61. $3x - 4y - 10 = 0$.
62. Уравненія перпендикуляровъ: $2x + 3y + 2 = 0$, $3x - 2y + 3 = 0$, $y = 0$.
63. $2x + 7y - 5 = 0$.
64. $y + 2 = 0$.
65 $x - y + 1 = 0$.
66. $x - 2y + 16 = 0$.
67. $3x + 4y - 25 = 0$.
68. $117x + 5y - 7 = 0$.
69. Прямая, соединяющая точку $M(-1, 1)$ съ точкой пересѣченія прямыхъ $x - y - 1 = 0$ и $x + 2y - 2 = 0$.
70. $x = 0$, $y = 0$.
71. $7x + y + 4 = 0$, $x - 7y + 6 = 0$.
72. $67x + 5y + 72 = 0$.
73. $3x + y - 1 = 0$.
74. Внутренній биссекторъ угла M_2: $x = y$.
75. Внѣшній биссекторъ угла M_1: $\frac{x + y - 3}{\sqrt{2}} = \frac{3x - 2y + 1}{\sqrt{13}}$.
76. $x^2 + y^2 = 25$.
77. $(3 + 4\sqrt{5})x + (6 + \sqrt{5})y = 12 + 16\sqrt{5}$.
78. Точка пересѣченія прямыхъ. $(x + 2y - 1) = 3$, $x = 2$.
79. $N(-2, 3)$.
69 $5x - 4y + 2 = 0$, $4x - 5y + 1 = 0$.
81. $62x - 41y + 20 = 0$, $73x + 14y + 31 = 0$.
82. Третья вершина тр-ка $M_3\left(-\frac{13}{5}, \frac{31}{5}\right)$.
83. $3x - 46x + 28 = 0$, $46x - 3y - 77 = 0$, $9x + 2y - 28 = 0$.
84. $x - 1 = 0$, $3x - 4y + 1 = 0$, $x - 8y + 27 = 0$.
85. $C(-9{,}52; 2{,}29)$.
86. $x = \frac{9 \pm 2\sqrt{84}}{5}$; $y = \frac{-2 \mp \sqrt{84}}{5}$.
87 $2x - y + 4 = 0$.
88. Двѣ изъ прямыхъ, удовлетв. условіямъ задачи: $\begin{cases} y = \left(-1 + \frac{9}{2\sqrt{5}}\right)(x + 2) \\ y = \left(-1 - \frac{9}{2\sqrt{5}}\right)(x + 2) \end{cases}$
69 $x = -\frac{4}{15}$, $y = -\frac{46}{15}$.
92 Если (x, y) старыя координаты точки, новыя координаты которой (x', y'), то $x' = -\frac{x + 2y - 1}{\sqrt{5}}$, $y' = +\frac{2x - y + 1}{\sqrt{5}}$.
93 Если (x, y) старыя координаты точки, новыя координаты которой (x', y'), то $x' = +\frac{(x + 2y - 1)\sqrt{7}}{5}$, $y' = \frac{(2x - y + 1)\sqrt{3}}{5}$
94. Если (x, y) старыя координаты точки, новыя координаты которой (x', y'), то $x' = -(x + y - 1)\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y' = \frac{(x - y + 1)}{2}$.

95. $\begin{cases} x_1 + y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}} = 0 \\ x_1 - y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$ 96. $3x_1 + 5y_1 = 0, \quad 3x_1 - 5y_1 = 0.$

97. 1. $8x + \sqrt{17}\,y + 3 = 0$, 2. $8x - \sqrt{17}\,y + 3 = 0$.

98. Прямая, проходящая черезъ точку пересѣченія прямыхъ A_1B_1 и A_2B_2.

99. Стороны параллелограмма. Въ I углѣ точки на прямой $ay + bx = \frac{2s}{\sin\theta}$; во II углѣ на прямой: $ay - bx = \frac{2s}{\sin\theta}$; въ III углѣ на прямой: $ay + bx = \frac{2s}{\sin\theta}$ и въ IV углѣ на прямой $bx - ay = \frac{2s}{\sin\theta}$. 169. Прямая.

101. Прямая, проходящая черезъ середину стороны AB.

102. Прямая $2sy - 2ax = s^2 - a^2$.

103. Прямая, параллельная данной прямой.

104. Прямая, соединяющая средину основанія съ противолежащей вершиной.

105. Если (a, o) и $(-a, o)$ координаты концовъ основанія и $y = mx + n$ данная прямая, то уравненіе геометрическаго мѣста будетъ $x^2 + mxy + ny - a^2 = 0$.

106. $2x^2 - 5xy + 2y^2 + 6x = 0$. 107 $xy = \frac{2Smn}{(m+n)^2 \sin\omega}$

168. $xy = \frac{2Cmn}{(m+n)^2 \sin\varphi}$ 106. $3x^2 - y^2 + 2ax = a^2$.

110. $\frac{x_0}{x} + \frac{y_0}{y} = 1$ 111. $x^2 - y^2 + 2xy\,ctg\,\varphi = a^2$.

112. $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ (медіана основанія треугольника).

113. Прямая $(p - x_A)\left(\frac{q}{h}y - x + a_R\right) = (q + a_R)\left(\frac{p}{h}y + x - x_A\right)$.

114. $4x + 5y + 2 = 0$.

115 Полагая $C(a, o)$, $D(-a, o)$, считая оси прямоугольными и $Ax + By + C = 0$ уравненіемъ прямой AB, найдемъ уравненіе геометрическаго мѣста $Bx^2 - Axy + Cy - Ba^2 = 0$.

116 $x^2(k^2 - 9a^2) + k^2y^2 + 9a^2k^2 - k^4 = 0$. 117 $x^2 + y^2 + 9a^2 - 2k^2 = 0$.

118. $x + y = 1$. 119. $x^2 + y^2 - xy = k^2$.

120. Прямая. 121. Прямая.

122 Кривая 2-го порядка (гипербола). 123. Прямая

124. За начало беремъ точку O. За ось абсциссъ прямую, параллельную даннымъ прямымъ. Уголъ между осями прямой. Пусть уравненія данныхъ прямыхъ будутъ $y = l$ и $y = l + k$; тогда геом. мѣсто точки $C: hx + (h + l)y = h^2 + (h + l)^2$; геом. мѣсто точки $D: hx + ly = h^2 + l^2$. 125 Окружность

126. $9xy - 6px - 6py + 2p^2 = 0$. 127 $x + y = a + b$.

128 $x^2 + y^2 = cx = 0$.

129. При измѣненіи прямоугольника $OBMA$ прямая MK вращается около точки (m, m).

130 Прямая, проходящая черезъ точку A.

131. Если начало прямоугольныхъ координатъ въ центрѣ круга съ радіусомъ, равнымъ r, а точка A имѣетъ координаты c и 0, то искомое геом. мѣсто имѣетъ уравненіе $\frac{c^2 - r^2}{2}(x^2 + y^2) = cr^2x + r^4 = 0$.

132. Если уравненія прямыхъ AB и A_1B будутъ соотвѣтственно $y = \alpha(x - a)$ и $y = \beta(x - a_1)$, то искомое геом. мѣсто имѣетъ своимъ уравненіемъ.

$$x^2 + y^2 - (a + a_1)x - \frac{(a - a_1)(1 + \alpha\beta)}{\alpha - \beta}y + aa_1 = 0.$$

133. Взявъ за ось абсциссъ основаніе треугольника, за ось ординатъ перпендикуляръ въ срединѣ основанія, получаемъ уравненіе геометрическаго мѣста:

$$y^2 - 3x^2 = ax + \frac{a^2}{4} = 0.$$

134. Принимая стороны неподвижнаго прямого угла за оси координатъ и обозначая координаты точки A черезъ a и b, получаемъ уравненіе геом. мѣста:

$(bx + ay)(x^2 + y^2) - (a^2 + b^2)xy = 0$. 138. Окружность.

139. Кривая 2-го порядка (гипербола).

140. За оси координатъ беремъ прямую AB и прямую къ ней перпендикулярную и проходящую черезъ средину отрѣзка AB. Обозначаемъ. $AB = 2a$, $AD = l$, $BC = l'$. Уравненіе искомой линіи: $\left(x + \frac{a(l' - l)}{l' + l}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{ll'}{l + l'}\right)^2$.

141. Прямая.

142. Кривая 2-го порядка (гипербола).

143. Эллипсъ, гипербола, парабола.

144. $\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{4}\right)$.

145. $(0, -1)$.

146. $K = 1$, $x + (3 + \sqrt{8})y + 3 + \sqrt{8} = 0$, $x + (3 + \sqrt{8})y + 3 + \sqrt{8} = 0$.

147. $C\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

148. $\lambda = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$; I $\begin{cases} x\sqrt{3} - 2y = 0 \\ x - 2\sqrt{3}y + 2 = 0 \end{cases}$; II. $\begin{cases} x\sqrt{3} + 2y = 0. \\ x + 2\sqrt{3}y + 2 = 0 \end{cases}$.

149. $x = y\,tg\left(45^0 \pm \frac{\varphi}{2}\right)$, φ.

150. $0 = \begin{vmatrix} x^2, & xy, & y^2, & x, & y, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 4, & -2, & 1, & 2, & -1, & 1 \\ 1, & -2, & 4, & 1, & -2, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & 1 \\ 9, & 0, & 0, & 3, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 60xy - 60y^2 + 60x - 120y + 180.$

151. $x + 4 = 0$, $x - 2y + 2 = 0$.

152. $2x - y = 0$, $x + 2y - 2 = 0$.

153. 1. $(a + a')x + (b + b')y + c + c' = 0$. 2. $(a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0$.

154. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0$.

155. $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

156. Уравненія совокупностей противоположныхъ сторонъ четыреугольника, имѣющаго діагоналями данные діаметры: $5(x+y)^2 - 1 = 0$ и $5(x-y)^2 - 9 = 0$.

157. Уравненіе совокупности 3-й стороны и касательной къ окружности въ вершинѣ $\triangle$-ка, противолежащей этой 3-й сторонѣ: $(3x - 2y - 4)(x + y - 3) + \frac{7}{5}(x^2 + y^2 - 5) = 0$.

158. $x^2 + xy + 6y^2 + 2x + 7y - 17 = 0$.

159. $(A - B)xy - Abx + Bay = 0$.

160. $C(-1, 0)$; $x_1^2 + x_1y_1 - 1 = 0$.

161. Дискриминантъ равенъ числу -400.

162. Уравненіе совокупности асимптотъ: $x^2 + xy + 2x + y + 1 = 0$.

163. Уравненіе гиперболы $(x + y - 1)(2x - y + 1) - 2 = 0$.

164. $A(x - x_c)^2 + 2B(x - x_c)(y - y_c) + C(y - y_c)^2 + E = 0$.

165. $(ax_1 + by_1)(ax_1 + by_1) + K = 0$.

166. $y^2 + 2xy - 2p(x + y) = 0$.

167. $x - y = 0$.

168. Парабола.

169. $2x - y + 6 = 0$.

170. $2x - 5y + C = 0$.

171. $x + 2y + 2 = 0$.

172. $2x - y = 0$.

173. $15x + 10y + 3 = 0$.

174. $5x + 5y + 2 = 0$.

175. $x = y$.

176. $4x + 5y - 1 = 0$.

177. 1) $x + y = 0$ и $y - x + 2 = 0$; 2) $x + y = 0$ и $y - x = 0$.

178. a) $x = 0$, $x + 2y + 1 = 0$; b) $x + 2y + \frac{1}{2} = 0$; c) окружность.

179. $x = -3$; другая точка пер. удалена въ безконечн. Угловые коэффиціенты $2 \pm \sqrt{5}$.

180. Гипербола.

181. *Эллипсъ.* Уравн. большой оси $x + 2y - 8 = 0$, уравн. малой оси $2x - y - 1 = 0$. Прост. уравн. $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$.

182. *Эллипсъ.* Уравн. большой оси $x + y - 2 = 0$, уравн. малой оси $x - y = 0$. Прост. уравн. $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{1} = 1$.

183. *Эллипсъ.* Уравн. большой оси $x + y - 2 = 0$
малой „ $x - y = 0$ $C(1, 1)$.
Прост. уравн. $\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} = 1$.

184. *Эллипсъ.* Уравн. большой оси $2x - y + 1 = 0$
малой „ $x + 2y - 2 = 0$ $C(0, 1)$.
Прост. уравн. $\frac{x_1^2}{81} + \frac{y_1^2}{36} = 1$.

185. *Эллипсъ.* Уравн. большой оси $y - 3x - 2 = 0$, „ малой „ $3y + x - 6 = 0$, $C(0, 2)$.
Прост. уравн. $\frac{x_1^2}{36} + \frac{y_1^2}{16} = 1$.

186. *Эллипсъ.* Уравн. большой оси $y + 2x - 4 = 0$, „ малой „ $2y - x - 3 = 0$, $C(1, 2)$
Прост. уравн. $\frac{x_1^2}{64} + \frac{y_1^2}{4} = 1$.

187. *Гипербола.* Уравн. вещ. оси $3x - y + 5 = 0$, „ мним. „ $x + 3y - 5 = 0$, $C(-1, 2)$.
Ассимптоты $3x + 4y - 5 = 0$, $y - 2 = 0$. Прост. уравн $\frac{x_1^2}{1} - \frac{y_1^2}{3} = 1$.

188. *Гипербола.* Уравн. вещ. оси $x - 4y - 1 = 0$, „ мним. „ $4x + y - 4 = 0$, $C(1, 0)$.
Прост. уравн. $\frac{x_1^2}{25} - \frac{y_1^2}{9} = 1$. Ассимптоты $7x + 23y - 7 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

189. *Гипербола.* Уравн. вещ. оси $4x - 3y - 7 = 0$, „ мн. „ $3x + 4y + 1 = 0$, $C(1, -1)$.
Ассимптоты $7x - 24y - 31 = 0$, $x - 1 = 0$. Прост. уравн. $\frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{9} = 1$.

190. *Гипербола.* Уравн. вещ. оси $x - y + 1 = 0$, „ мн „ $x + y + 3 = 0$, $C(1, 2)$.
Ассимптоты $x - 1 = 0$, $y - 2 = 0$. Прост. ур. $x^2 - y^2 = 1$.

191. *Гипербола.* Уравн. вещ. оси $2x - 3y + 1 = 0$, „ мн. „ $3x + 2y - 5 = 0$, $C(1, 1)$.
Прост. уравн. $\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{9} = 1$. Ассимптоты $5x + 12y - 17 = 0$, $x - 1 = 0$.

192. *Гипербола.* Уравн. вещ оси $x - 2y + 1 = 0$, „ мн. „ $2x + y - 3 = 0$, $C(1, 1)$.
Ассимптоты $x - y = 0$, $x - 7y + 6 = 0$. Прост. уравн $\frac{x_1^2}{9} - \frac{y_1^2}{1} = 1$.

193. *Парабола.* Уравнение оси $5x - 12y + 7 = 0$ Вершина $(1, 1)$.
Уравн. касат. въ верш. $12x + 5y - 17 = 0$.
Прост. уравн. $y_1^2 = 2x_1$.

194. *Парабола.* Уравненіе оси симметріи $3x + 4y - 5 = 0$, уравн. касат. въ вершинѣ $4x - 3y + \frac{1}{2} = 0$. Прост. уравн. $y_1^2 = 10x_1$.

195. *Парабола.* Уравн. оси симметріи $4x + 3y + 5 = 0$, уравн. касат. въ вершинѣ $3x - 4y + 7 = 0$. Прост уравн. $y_1^2 = 14x_1$.

196. *Парабола* Уравн. оси симм $3x + 4y = 0$, уравн. касат. въ верш. $4x - 3y = 0$. Вершина $(0, 0)$. Прост. уравн. $y_1^2 = 2x_1$.

197. *Парабола.* Уравн. оси симм. $x + y - 2 = 0$, уравн. касат. въ верш. $x - y = 0$. Прост. уравн $y_1^2 = 2\sqrt{2}x_1$.

198. $x_1^2 - y_1^2 = \frac{1}{2}$, фокусы $\left(-1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, дир. $x + y = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

199. *Эллипсъ.* Уравн большой оси $2x - y - 3 = 0$, уравн малой оси $y + 1 = 0$.
Прост. уравненіе $x_1^2 + 3y_1^2 = 6$. Форм. перехода $x_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(y + 1)$,
$y_1 = \pm \frac{1}{2}(2x - y - 3)$.

200. *Эллипсъ.* Уравн. большой оси $5x + 4y - 9 = 0$, „ малой „ $x - 2y + 1 = 0$. $C(1, 1)$.
Прост. уравненіе $7x_1^2 + 21y_1^2 - 12 = 0$.

201. *Гипербола.* Уравненіе веществ. оси $2x - y - 3 = 0$, уравненіе мнимой оси $y + 1 = 0$. Прост. уравн. кривой $x_1^2 - 3y_1^2 = 6$. Ассимптоты $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - 2 = 0. \end{cases}$

202. *Гипербола.* Уравн. вещ. оси $x - 2y + 1 = 0$, „ мним. „ $5x + 4y - 9 = 0$, $C(1, 1)$.
Прост. уравн. $21x_1^2 - 7y_1^2 - 12 = 0$.

203. *Парабола.* Уравн. оси $2x - y - 3 = 0$, уравн. касат. въ вершинѣ $y + 1 = 0$.

Простѣйшее уравненіе $y_1^2 = \frac{\sqrt{2}}{6} x_1$. Формулы перехода $y + 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} x_1$, $2x - y - 3 = + 2y_1$.

204. *Парабола.* Уравн. оси симметріи $x - 2y + 1 = 0$; уравн. касат. къ вершинѣ $5x + 4y - 9 = 0$. Простѣйшее уравненіе $y_1^2 = \frac{3\sqrt{7}}{7} x_1$. Формулы перехода $x_1 - 2y_1 + 1 = \pm \frac{2\sqrt{7}}{7} y_1$; $5x + 4y - 9 = -2\sqrt{7}\, x_1$.

205. $\frac{2}{3} x_1^2 + 2y_1^2 = 1 \begin{cases} x_1 = \frac{(y + x)\sqrt{3}}{2}, \\ y_1 = \frac{y - x}{2}. \end{cases}$

206. $\frac{2\sqrt{3}}{3} x_1^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} y_1^2 - 1 = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{y - (2 + \sqrt{3})\, x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}, \\ y_1 = \frac{y - (\sqrt{3} - 2)\, x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}. \end{cases}$

207. $\frac{1}{3} x_1^2 - y_1^2 = 1 = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{(y + x)\sqrt{3}}{2}, \\ y_1 = \frac{y - x}{2}. \end{cases}$

208. $y_1^2 = \frac{3p}{2} x_1 \begin{cases} x_1 = x + \frac{y}{2} + \frac{p}{8}, \\ y_1 = \left(y + \frac{p}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ **209.** $y_1^2 = \frac{3}{4} x_1 \begin{cases} x_1 = \left(y + \frac{x}{2} - \frac{1}{16}\right) \\ y_1 = \left(x - \frac{1}{4}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

210. $4x^2 + 4y^2 - 7xy - 7x + 8y = 0$.

211. $(x - 2y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 - \frac{1}{9} = 0$.

212. $(x + y - 1)^2 + 4(x - y + 1)^2 - 8 = 0$.

213. $(x + 2y - 1) + (x + y - 1)^2 = 0$. **215.** $(x - y)^2 - 8x = 0$.

216. $x^2 - 2xy + y^2 + x - 1 = 0$. **217.** $p = q \sin^2 \varphi$.

218. $\frac{19}{27} y - \left(\sqrt{\frac{8}{19}}\, x + 1\right)^2 = 6(y - 1)^2 - 9$.

219. $(x + 1)^2 + \left(\frac{3x - 4y + n}{5}\right)^2 = \frac{5}{2}$.

220. $x_1 = \frac{\left(y - \frac{b}{a} x\right)\sqrt{a^2 + b^2}}{2b}$; $y_1 = \frac{\left(y + \frac{b}{a} x\right)\sqrt{a^2 + b^2}}{2b}$

221. $p = \frac{2u^2v^2}{(u^2 + v^2)^2}$. **222.** $p = \frac{2u^2v^2}{(u^2 + v^2 + 2uv \cos \omega)^2}$.

223. $x^2 + 2xy + y^2 + 5x - y = 0$.

224. $x^2 - y^2 + \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{3}(x + y) - \frac{12 \pm 8\sqrt{2}}{3} = 0$.

225. $x = \pm 2y$. **226.** $x = \pm y$; длины сопр. $\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sin \varphi = \sqrt{0{,}3}$

227. $\sin \omega = \sqrt{\frac{3}{4}}$. **228.** Длина ихъ $\sqrt[4]{2}$

229. $\sqrt{\frac{10}{3}}$, $\sqrt{2}$.

230. $8(x + 2y - 1)^2 + 3(x - 3y + 2)^2 - 40 = 0$.

231. $3(x - 3y)^2 - 8(2x - y - 1)^2 - 160 = 0$.

232. $\frac{2x - y + 1}{\sqrt{5}} = \frac{x + y - 3}{\sqrt{2}}$. **233.** $(x + y - 1)(2x - 3y - 3) + 4 = 0$.

234. $(x + 2y + 1)^2 - (2x + y - 1)^2 - 12 = 0$. **235.** $(x - y + 1)(x + y - 4) + 2 = 0$.

236. $p = \frac{3\sqrt{2}}{8}$. **237.** $x_1 y_1 = \frac{a^2 + b^2}{4}$.

238. Парабола, имѣющая одинаковую ось съ данной.
239. Прямая.
240. $A(x - x_c)^2 + 2B(x - x_c)(y - y_c) - A(y - y_c)^2 + F = 0.$
241. $(y - 1)(x + y + 1) + 2 = 0.$ Та вѣтвь гиперболы, на которой $x + y + 1 < 0$.
242. $x^2 + y^2 - y = 0.$
243. $2(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$, гдѣ a и b полуоси эллипса.
244. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}.$
245. Парабола
246. Окружность.
247. Равнобочная гипербола.
248. Эллипсъ.
249. Гипербола.
250. Окружность.
251. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{2}(x + y - 2)^2.$
252. $y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$
253. $x^2 - y^2 = \frac{2a^4}{a^2 - b^2}$; если $a^2 > b^2$; $x^2 - y^2 = \frac{2b^4}{a^2 - b^2}$, если $a^2 < b^2$.
254. $x^2 - y^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}.$
255. b.
256. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$
257. $2y - x - 14 = 0$; $F_1(-2,4)$; $2y - x + 4 = 0$; $F_2(0,0)$.
258. $2x + y = 0$, $F\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right).$
259. $100[(x - 2)^2 + (y - 1)^2] = (x - y - 50)^2.$
260. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (x + y - 1)^2.$
261. Фокусы параболъ въ точкахъ $\left(1 \pm \frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right).$
262. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{2}{15}(x - 2y + 1)^2.$
263. $(x + 2)^2 + y^2 = \frac{4}{15}(x - 2y + 1)^2.$
265. $e = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
266. $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 324 = 0.$
267. 1. $(4x + 1)^2 + (4y + 6)^2 = 5(x + 2y + 1)^2$, 2. $(5x - 1)^2 + (5y + 3)^2 = 5(x + 2y + 1)^2.$
268. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = [(\sqrt{3} - 1)x + (\sqrt{2} - 1)y + 2 \mp \sqrt{2}]^2$,
$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = [(\sqrt{2} - 3)x + (\pm\sqrt{2} - 1)y + 2 \mp \sqrt{2}]^2.$
269. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (x + y + 1)^2.$
270. $(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = 2\alpha^2(x + y + 1)^2$; $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{6}.$
271. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{25}{9}(x - y + 4)^2.$
272. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{2}.$
274. $x^2 + y^2 - 2xy - 4x = 0.$
275 1. $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$. 2. $x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$
276. $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0.$
277. $2ac \cdot \frac{\sin\alpha(1 - e^2)}{1 - e\cos^2\alpha}$, гдѣ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
278. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$
279 $3x^2 + 4xy - 8x - 4y + 4 = 0$
280. $x^2 - y^2 + 2y - \frac{1}{2} = 0$
281. $x^2 + y^2 = 1.$
282. $y + (2 \pm \sqrt{3})x = 0.$
283. $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 324 = 0.$
284. $(x - a)^2 + y^2 = 2a^2.$
287. Гипербола.
288. $4x - 5y - 13 = 0$; $80x - 117y + 267 = 0.$
289. $17x + 12y - 45 = 0$; $10x + 9y + 24 = 0.$
290. $5x + 4y + 8 = 0$; $17x + 15y - 8 = 0.$
291 $2x - 3y + 5 = 0$; $2x - 3y - 5 = 0.$
292. $10x + 3y - 8 = 0$; $10x + 3y + 8 = 0.$
293. $x - 2y + 7 = 0$; $7x + 2y + 1 = 0.$
294. $\frac{p}{2\sin\alpha}.$
295. $45°$.
298. $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{5}{3}.$

297. Искомая площадь $S = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\sin\theta$, гдѣ a и b полуоси гиперболы, а θ уголъ между асимптотами.

312. $x(1 - \sqrt{3}) + y(1 + \sqrt{3}) - 4 = 0$.

313. $(x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} - 1)^2 - 2(x\sqrt{3} - y - \sqrt{3} + 1)^2 = 8$.

314. $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 2$. **315.** $x = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}$, $y = \frac{2y_1y_2}{y_1 + y_2}$.

316. Точки кривой, нормали въ которыхъ проходятъ черезъ (x_1, y_1), лежатъ на гиперболѣ $a^2x_1y + b^2y_1x = c^2xy$. Знакъ — для эллипса „ + „ гиперболы.

317. $x_1^2 - y_1^2 + 2\sqrt{15}x_1y_1 + 16x_1 = 0$. **318.** $x = \frac{a^2 - b^2}{a}$.

319. $x_0 = \frac{y_1y_2}{2q}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

320. Совокупность двухъ параболъ $(y^2 - 1)^2 - 4x^2 = 0$.

321. $x^2 + y^2 = a^2$. **322.** Касательная въ вершинѣ.

323. Фокусъ. **324.** $M\left(\frac{27}{22}, \frac{38}{11}\right)$.

325. $x^2b^4 + y^2a^4 = a^2b^4$. **326.** $Cx + Bu^2 = 0$.

327. $y^2 = \frac{p}{2}\left(x - \frac{p}{2}\right)$ (парабола). **328.** Фокусъ.

330. $x^2y_1y_2(y_1 - y_2) - 2xyy_1y_2(x_1 - x_2) + y^2(x_1^2y_2 - x_2^2y_1) + 2xy_1y_2(x_1y_2 - y_1x_2) - y(x_1^2y_2^2 - y_1^2x_2^2) = 0$

331. Если касательныя параллельны прямой $y = mx$, то $(x + my)(mx - y) = mc^2$.

332. $y^2 = 2p(x - 2p)$. **333.** $x + y - 1 = 0$.

334. $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. **335.** $y^2 = 2px = tg^2\alpha(2x + p)^2$.

336. Директриса. **337.** Парабола.

339. Если $y^2 = 2px$ и $y^2 = 2p_1(x - a)$ уравненія параболъ, то искомая прямая: $x = \frac{p_1a}{p_1 - p}$.

340. Если ось ox касается кривой, и начало координатъ въ точкѣ M, то уравненіе линіи $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0$, а координаты искомой точки $\left(0, \frac{2E}{A + C}\right)$.

341. $4(r^2 - a^2)x^2 + 4r^2y^2 - 4(r^2 - a^2)ax - (r^2 - a^2)^2 = 0$.

342. Координаты 2-го фокуса (8,0). Длина большой оси симметріи $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

343. $15y^2 + 8xy - 4y - 4 = 0$. **344.** $9x^2 - 6xy + y^2 - 16x + 32y + 16 = 0$.

345. $4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 18y + 17 = 0$. **346.** Окружность.

349. Директриса параболы. **350.** Парабола.

351. Парабола **352.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2y^2}{a^4} = 1$.

353. Парабола. **354.** Кривая 2-го порядка.

355. Если координаты данной точки α, β, то уравненіе искомой окружности будетъ. $x^2 + y^2 - (p + \alpha)x - \frac{\beta y}{2} = 0$. **356.** $(px - qy)^2 = p(p^2 + q^2)x$.

357. Кривая 2-го порядка. **358.** Эллипсъ.

359. Гипербола, если $B_1 = B_2$, то перпендикуляръ къ прямой o_1o_2 въ ея срединѣ.

360. Кривая 2-го порядка. **364.** Окружность.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

1. $2abc$.

2. $\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$.

3. $\sqrt{2}$.

4. $\cos v = \frac{1}{2}$.

5. $v = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

6. $(-3, 2, 3)$.

7. $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

8. $M_1(x, y, o)$, $M_2(x', o, z')$, $M_3(o, y'', z'')$,
гдѣ $x - x' = +\frac{l}{\sqrt{2}}$, $y - y'' = +\frac{l}{\sqrt{2}}$, $z' - z'' = +\frac{l}{\sqrt{2}}$.

9. $x' = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, $y' = \frac{x+y-2z-1}{\sqrt{6}}$, $z' = \frac{x+y+z-1}{\sqrt{3}}$.

10. $x = \frac{x'}{2} + \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{2}$, $y = \frac{x'}{2} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{2}$, $z = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{2}}$, $4z'^2 = a^2$.

11. Круги пересѣченія сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ съ плоскостями $y = \pm z$.

12. $(2x-x_0-x_1)(x_0-x_1)+(2y-y_0-y_1)(y_0-y_1)+(2z-z_0-z_1)(z_0-z_1)=0$

14. $C(1, 1, 1)$, $r = 1$.

15. $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

16. Если (o, o, o) (a, o, o), (o, b, o), (o, o, c) вершины, то плоскости пересѣкаются въ точкѣ: $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{b}{3}$; $z = \frac{c}{3}$

17. $z = 1$.

18. $x-1=0$, $y-1=0$, $z-1=0$, $x+y+z=1$.

19. $3x-2y+7z-6=0$.

20. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $\cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{6}}$; $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

21. 135°

22. $2x-y-3z=0$.

23. $x-y=0$.

24. $x+y+(4+3\sqrt{2})z=2$

25. Не лежитъ.

26. 6.

27. Объемъ $= \frac{8}{6}$.

28. $\sqrt{3}$.

29. $\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

30. $z_1 = -\frac{2}{7}$, $z_2 = -5{,}6$.

31. $x+2y=0$.

32. $2x-4y+2z-3=0$.

34. 0.

35. Если (x, y, z) старыя координаты точки, новыя координаты которой (x_1, y_1, z_1), то $x_1 = +\frac{x+2y+5z+1}{\sqrt{30}}$, $y_1 = +\frac{2x-y+1}{\sqrt{5}}$, $z_1 = \frac{x+2y-z-1}{\sqrt{6}}$.

36. $x+y\pm z=a$.

37. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-30)^2=1$.

38. $\frac{1}{2}\sqrt{101}$.

39. $\frac{x}{x_0} \pm \sqrt{\frac{2}{px_0}}\,y \pm \frac{1}{b}\sqrt{1-\frac{a^2}{x_0^2}}\,z+1=0$.

40. $l = +\sqrt{2}$.

41. $B = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}$; коэф. A изъ уравненія $aA^2 + (Bb + c)A + \frac{q}{2} = 0$.

42. $\begin{cases} 2x - y - 2z + 4 = 0. \\ 4x - y - 2z + 2 = 0. \end{cases}$

43. Плоскость.

44. Уголъ между прямыми 60°.

45 $\cos v = \frac{14}{15}$.

46. $\sin W = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

47. Уравненіе плоскости, если $M(a, b, c)$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{y}{c} = 2$.

48. $x + 2y + 1 = 0$.

49. $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 3x - y + 4z - 12 = 0. \end{cases}$

50. $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0. \\ y - z - 2 = 0. \end{cases}$

51. Точка пересѣченія прямой $\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z}{-1}$ съ плоскостью $x + 2y - z = 0$.

52. $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0. \\ 2x - y - z + k = 0 \end{cases}$

53. $\begin{cases} y = 2 + z. \\ x = 1 - 2z. \end{cases}$

54. Уравненія прямой: $z - 2x - 1 = 0$, $y + 1 = 0$.

55. $\frac{x - y - 1}{-1} = \frac{z - 1}{2}$.

56. $\begin{cases} x - y + 3 = 0. \\ z - 1 = 0. \end{cases}$

57. $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0. \\ x + z - 1 = 0. \end{cases}$

58. $x + y + z = 0$.

59. $\begin{cases} 4x + y - z = -34. \\ 2x - z = -18. \end{cases}$

60. $\begin{cases} x - y - 1 = 0. \\ x - z - 1 = 0. \\ y - z = 0. \end{cases}$

61. Искомая прямая проходитъ черезъ точку пересѣченія прямой $x = y = z$ съ плоскостью $x + 2y - z - 1 = 0$.

62. $5x + 3y - z - 1 = 0$.

63. $y - 2z + 1 = 0$.

64. $\begin{cases} 3x + 3z - 1 = 0. \\ 3y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$

65. $\begin{cases} x - z + 3 = 0 \\ 2y - 3 = 0. \end{cases}$

66. $\begin{cases} 22x + 5y + 19z - 41 = \pm\sqrt{5}(2x + 11y + 7z - 9). \\ 3x + 2y - 4z + 1 = 0. \end{cases}$

67. $\frac{13}{4} - \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

68. $\frac{x - 3}{9} = \frac{y - 2}{13} = \frac{z - 1}{20}$ или $\frac{x - 3}{77} = \frac{y - 2}{39} = \frac{z - 1}{-60}$.

69. $N(1, 2, 0)$.

70. $\delta_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\delta_2 = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$, $\delta_3 = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.

71 $\begin{cases} x + y + z - a = 0 \\ z + a(x - 1) = 0. \end{cases}$

72. $\begin{cases} a(x - 1) + z = 0. \\ (a + 1)(y - 1) + z + 1 = 0. \end{cases}$

73. $z = 0$.

74. Уравненія прямой, если оси координатъ ребра трехграннаго угла: $x = y = z$.

75 $x^2 + y^2 - 2xy - 4z + 2 = 0$.

76. $x + 2y + 3z + 1 = 0$.

77. $2x^2 + 2y^2 - 2z^2 - x - 2y + 4z - 1 = 0$.

78. $2x^2 + z^2 - 3xy + 3xz - 3yz - 5x + 3y - 14z = 0$.

79. $xy + xz - zy - x = 0$.

80. $7x^2 - 5y^2 - 2z^2 - 10xy + 2xz - 10yz + 18x - 36z - 27 = 0$.

81 $4x^2 - y^2 - 10xy + 4xz - 3yz + 8x + 2y + 14z = 0$.

82. $x + y = 0$.

83. $2x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 12xy + 4xz - 4yz + 5x + 23y + 9z + 4 = 0$

84. $y^2 - 4z^2 - xy + 3xz + 3yz = 0$.

85. $2(y + 2z - 2)^2 + 3(z + 3x - 3)^2 = x$.

86. $382x^2 + 323y^2 + 208z^2 - 687xy - 507xz + 406yz + 430x - 363y - 315z + 125 = 0$.

87. $x^2 + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0$.

88. Пересѣченіе шара $x^2 + y^2 + z^2 - x_0x - y_0y - z_0z = 0$, радіуса $\frac{1}{2}\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$, съ данною поверхностью.

89. $x^2 + 5y^2 + 4z^2 - 2xy - 8yz - 1 = 0.$

90. $x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 10yz - 6x - 2y + 2z + 3 = 0.$

91. $\left(\frac{x}{z+h}\right)^2 + \left(\frac{y}{z-h}\right)^2 = \frac{R^2}{h^2}.$

92. $\left(\frac{xz_0 - zx_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{yz_0 - zy_0}{b}\right)^2 = (z - z_0)^2.$

93. $y = x\,tg\,(az).$ **94.** $\frac{a^2c^2}{b^2}(y^2 - x^2 - c^2 - z^2).$

95. $b^2\left(\frac{y^2}{x^2} + \left[x + y + z - \frac{b(x+y)}{x}\right]^2\right) = a^2$, поверхность четвертаго порядка.

96. $x^2 + y^2 - xz - yz - z - 1 = 0.$

97. $z^2(y - z)^2 + [y(x - 1) + z(y - x)]^2 = z^2(y - 1)^2$, поверхность четвертаго порядка.

98. $x^2 + \frac{1}{9}y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 3.$ **99.** $xy + xz + yz = 0.$

190. $y^2 + z^2 = 2px.$

101. 1°. Линія пересѣченія двухъ параболоидовъ вращенія. 2°. Окружность.

102. Прямая. **103.** $x^2 + y^2 - 5z^2 - 2z - 2 = 0$

104. $x^2 - y^2 - (\sqrt{3} - 1)xz + (\sqrt{3} - 1)yz - x + (2 - \sqrt{3})y + (\sqrt{3} - 1)z - 1 = 0.$

105. Поверхность 2-го порядка конусъ.

106. За ось OZ возьмемъ перпендикуляръ, опущенный изъ средины линіи, соединяющей центры окружностей на плоскости. Плоскость ZOX пусть содержитъ центры окружностей. Обозначимъ черезъ $2h$ разстояніе между плоскостями, черезъ R радіусъ окружностей и черезъ a абсциссу центра одной изъ окружностей. Тогда искомое геом. мѣсто будетъ. 1. конусъ $\left(x - \frac{a}{h}z\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{h^2}z^2$, 2. поверхность 4-го порядка $R^2(a^2 - x^2 - y^2) = x^2 + y^2 - \left(\frac{a}{h}xz\right)^2 - a^2x^2.$

107. Поверхность 2-го порядка. **199.** Конусъ 2-го порядка.

109. $z^2 - y^2 + 2x = 0$ **110.** $x^2 + 2yz = 1.$

111. $x - y + \frac{x - z}{\sqrt{2}} = 0.$

112. Обозначивъ черезъ $2h$ кратчайшее разстояніе между прямыми и черезъ $2l$ длину отрѣзка движущейся прямой между двумя данными точками, получимъ при надлежащемъ выборѣ системы координатъ уравненіе поверхности:

$$\left(\frac{x}{z+h}\right)^2 + \left(\frac{y}{z-h}\right)^2 = \frac{l^2}{h^2} = 1.$$

113. Эллипсъ.

114. $z^2 - 2xy - az + \frac{z}{2a}(x + y)^2 = 0.$

115. $4z - xy = 0.$ **116.** $x^2 + y^2 = 4cz.$

117. $(10x - 5y - 5z + 2)^2 + (10y - 5x - 5z + 11)^2 + (10z - 5x - 5y - 13)^2 = 294.$

118. $32(x + z)^2 + (8y + 1)^2 = \frac{1}{3}$

119. $\alpha x^2 + \gamma y^2 + Cz^2 + 2\beta xy + 2Eyz + 2Fyz + 2\delta x + 2\eta y + 2Iz + K = 0.$

120. $x^2 + y^2 + 2z + 1 = 0.$

121. $\frac{x}{24} = \frac{y}{-52} = \frac{z}{5}$ и $\frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}.$

122. Уравненіе поверхности: $\frac{1}{2}\{(x - y + z - 1)^2 + (x + y + z + 1)^2\} = 0.$

124. $\begin{cases} 1.\ x + y + 2z + 5 = 0;\ y = (3 + \sqrt{8})x - 1 + \sqrt{8}. \\ 2.\ x + y + 2z + 5 = 0;\ y = (3 - \sqrt{8})x - 1 - \sqrt{8}. \end{cases}$

125. $\begin{cases} \text{Если } b^2 > \frac{p}{q}c^2, \text{ то } x = \pm\frac{z}{c}\sqrt{b^2 - \frac{p}{q}c^2};\ y = \pm\sqrt{\frac{p}{q}}z \\ \text{Если } a^2 < \frac{p}{q}c^2, \text{ то ихъ нѣтъ.} \end{cases}$

126. $4x - 3y - 5z + 4 = 0.$

127. $\frac{(z_0y-y_0z)^2}{a^2b^2}+\frac{(z_0x-x_0z)^2}{a^2c^2}+\frac{(y_0z-z_0y)^2}{b^2c^2}=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}$

128. $C(1, 1, -1)$; $x_1^2+y_1^2+z_1^2+2x_1y_1-2y_1z_1+6x_1z_1-1=0$

129. Прямая центровъ $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$; $4x_1y_1+4x_1z_1-1=0$.

130. Плоскость центровъ $x+y+z-1=0$; $x_1^2+y_1^2+z_1^2+2x_1y_1+2y_1z_1+2x_1z_1=0$.

131. $A(x-x_c)^2+B(y-y_c)^2+C(z-z_c)^2+2D(x-x_c)(y-y_c)+$
$+2E(x-x_c)(z-z_c)+2F(y-y_c)(z-z_c)=0$.

132. $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$

133. Поверхность 2-го порядка. 134. $x^2+y^2-ax=0$.

135. Прямыя образуютъ конусъ: $(x+2)^2+4(y-1)^2-40\left(z+\frac{1}{5}\right)^2=0$.

136. $\frac{x+\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{2}{3}}{2}=\frac{z-\frac{2}{3}}{0}$ 137. $2x-3y+2z-2=0$.

138. $x+y+z=3$.

139. $x-y-z=0$; сопр. съ прямой $x=0$, $y=0$.

140. $l(x-1)+n(z-y)=0$; хорды въ плоскости $y=0$.

141. $z=0$, хорды, сопр. съ нею, въ плоскости $x=0$.

142. $2x+y-z=0$. 143. $\begin{cases}3x+1=0\\3z-2=0.\end{cases}$

144. $4x-y-4z+1=0$.

145. $\frac{x}{a^2}(x-x_0)+\frac{y}{b^2}(y-y_0)+\frac{z}{c^2}(z-z_0)=0$.

146. Съ прямыми параллельными OY.

147 Искомыя хорды параллельны прямой $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$.

148. Искомыя хорды параллельны прямой
$$\frac{x-y-z-2}{1}=\frac{-x+2y+z}{0}=\frac{-x+y-z}{1}.$$

149. $x-y+2z=1$, $x-5y-3z=1$; $39x+15y-12z=-31$.

150. $x-2z+2=0$. 151. $x=const$.

152. $z=1$, $2x-3y+2z-2=0$. 153. $y+1=0$, $x-2z+2=0$.

154. $(x-y+z-2)-(-x+2y-z)=0$.

155. $y=h$.

156. $18x-24y+23z+4=0$, $4x+3y+4z+6=0$.

157. $\frac{3x-y+z+1}{3}=\frac{-x+5y-z-3}{4}=\frac{x-y+3z-1}{12}$.

158. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$. 159. $\frac{x-\frac{1}{2}}{0}=\frac{y-\frac{1}{2}}{0}=\frac{z-z_0}{1}$.

160. $(x+(\sqrt{\lambda^2+1}-\lambda)z-R)^2+y^2-R^2=0$.

161. $(x-x_0)(Ax_0+Dy_0+Ez_0+G)+(y-y_0)(Dx_0+By_0+Fz_0+H)+$
$+(z-z_0)(Ex_0+Fy_0+Cz_0+J)=0$.

162. $x-y+z-1=0$. 163. Мнимое геом. мѣсто.

164. Точка $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

165 $2x_1^2+3y_1^2+6z_1^2=5$; $x=-\frac{1}{2}+\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{y_1}{\sqrt{3}}-\frac{z_1}{\sqrt{6}}$; $y=\frac{2}{3}+\frac{y_1}{\sqrt{3}}-\frac{z_1}{\sqrt{6}}$;
$z=\frac{2}{3}+\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{y_1}{\sqrt{3}}+\frac{2z_1}{\sqrt{6}}$.

166 $2x_1^2+6y_1^2+6z_1^2=1$, $x=-\frac{1}{3}+\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}$; $y=\frac{2}{3}+z_1$; $z=\frac{2}{3}-\frac{x_1-y_1}{\sqrt{2}}$.

167 Шаръ $6x_2^2+6y_2^2+6z_2^2=1$. Формулы перехода:

$$\begin{cases}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}z_2\\ y=\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}z_2\\ z=\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2-\frac{2}{\sqrt{6}}y_2.\end{cases}$$

168. Двуполый гиперболоидъ вращенія $6x_2^2+6y_2^2-2z_2^2=1$. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}z_2 \\ y=+\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2-\frac{2}{\sqrt{6}}y_2 \\ z=+\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}z_2. \end{cases}$$

169. Однополый гиперболоидъ $3x_2^2+6y_2^2-2z_2^2=1$. Формулы перехода.

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}z_2 \\ y=+\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{2}{\sqrt{6}}y_2 \\ z=+\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}x_2+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}z_2. \end{cases}$$

170. Прямая $y_0=0$, $z_0=0$. Формулы перехода

$$x=-1-m+\frac{x_0}{\sqrt{6}}+\frac{y_0}{\sqrt{2}}+\frac{z_0}{\sqrt{3}},\ y=-2m+\frac{2x_0}{\sqrt{6}}-\frac{z_0}{\sqrt{3}},\ z=m-\frac{x_0}{\sqrt{6}}+\frac{y_0}{\sqrt{2}}-\frac{z_0}{\sqrt{3}}.$$

171. Круговой цилиндръ $y_0^2+z_0^2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2$. Формулы перехода.

$$x=m+\frac{x_0}{\sqrt{6}}+\frac{y_0}{\sqrt{3}}+\frac{z_0}{\sqrt{3}},\ y=2+m+\frac{2x_0}{\sqrt{6}}-\frac{y_0}{\sqrt{3}}-\frac{z_0}{\sqrt{3}};$$

$$z=1+m+\frac{x_0}{\sqrt{6}}+\frac{y_0}{\sqrt{3}}+\frac{z_0}{\sqrt{3}}.$$

172. Эллиптическій цилиндръ $\frac{y_0^2}{1^2}+\frac{z_0^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}=1$. Формулы перехода.

$$x=m-1+\frac{x_0}{\sqrt{6}}+\frac{y_0}{\sqrt{2}}+\frac{z_0}{\sqrt{3}},\ y=2m+\frac{2x_0}{\sqrt{6}}-\frac{z_0}{\sqrt{3}},\ z=m+\frac{x_0}{\sqrt{6}}-\frac{y_0}{\sqrt{2}}+\frac{z_0}{\sqrt{3}}.$$

173. Гиперболическій цилиндръ $y_0^2-z_0^2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$.

Формулы перехода.
$$\begin{cases} x=m+\frac{x_0}{\sqrt{6}}+\frac{y_0}{\sqrt{2}}+\frac{z_0}{\sqrt{3}}, \\ y=2+2m+\frac{2x_0}{\sqrt{6}}-\frac{z_0}{\sqrt{3}}, \\ z=1+m+\frac{x_0}{\sqrt{6}}-\frac{y_0}{\sqrt{2}}+\frac{z_0}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

174.
$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{6}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}z_1 \\ y=-\frac{2}{\sqrt{6}}x_1+\frac{1}{\sqrt{3}}z_1 \\ z=1+\frac{1}{\sqrt{6}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}z_1 \end{cases} \qquad 3z_1^2-2y_1^2=0.$$

175.
$$\begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{6}}x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}z_1, \quad x_1=x_2, \\ y=-\frac{2}{\sqrt{6}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}z_1, \quad y=y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 2y_2^2+3z_2^2=\sqrt{6}x_2 \\ z=-\frac{1}{\sqrt{6}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z_1, \quad z_1=z_2+\frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

176. $2x_1^2+3y_1^2+6z_1^2=1=0$

177. $2x_1^2+3y_1^2-6z_1^2+1=0$

178. $6z_1^2+6y_1^2-\sqrt{2}\,x_1$

179. $6z_1^2+2\sqrt{3}\,y_1=0$

$$\begin{cases} x_1=\frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ y_1=\frac{x+y-z}{\sqrt{3}} \\ z_1=\frac{x+y+2z-1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

130. $\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1, & x_1 = x_2 + \frac{5}{6\sqrt{6}}, \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1, & y_1 = y_2 - \frac{5}{12\sqrt{2}}, \quad 6(y_2^2 + z_2^2) = \frac{1}{4\sqrt{6}}x_2. \\ z = -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1, & z_1 = z_2. \end{cases}$

131. $\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1, & x_1 = x_2 - \frac{5}{12\sqrt{6}}, \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}z_1, & y_1 = y_2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}, \quad 6y_2^2 - 6z_2^2 = \frac{2}{\sqrt{6}}x_2. \\ z = -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_1, & z_1 = z_2 - \frac{1}{12\sqrt{3}}, \end{cases}$

132. $\begin{cases} x_2 = \frac{x - z + \frac{1}{3}}{\sqrt{2}}, \\ y_2 = \pm\frac{x + z}{\sqrt{2}}, \quad z_2^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}x_2 \\ z_2 = \pm\left(y - \frac{2}{3}\right). \end{cases}$

133. $x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{2}z'^2 + 1 = 0, \quad \begin{cases} x = x', \\ y = \frac{y' + z'}{\sqrt{2}} \\ z = \frac{-y' + z'}{\sqrt{2}} \end{cases}$

134. $x'^2 + \sqrt{\lambda^2 + 2}\,(y'^2 - z'^2) = 0.$

135. Двѣ совпадающія плоскости съ $x + y + z - 1 = 0$.

136. $z_1^2 = \frac{\sqrt{6}}{3}x_1, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{x - 2y + z + 1}{\sqrt{6}}, \\ y_1 = \frac{x - z}{\sqrt{2}}, \\ z_1 = \frac{x + y + z - 1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

137. $4y^2 - 2z^2 = x$

138. $13x + 18y + 26 = 0$, $10y + 13z = 0$

139. $2x_1^2 + 2y_1^2 - 4z_1^2 = 1.$

140. Эллиптическій цилиндръ $2y_2^2 + 3z_2^2 = 1, \quad \begin{cases} x_1 = \frac{x_2}{\sqrt{6}} + \frac{z_2}{\sqrt{3}} + \frac{y_2}{\sqrt{2}} \\ y_1 = -\frac{2x_2}{\sqrt{6}} + \frac{z_2}{\sqrt{3}} \\ z_1 = \frac{x_2}{\sqrt{6}} + \frac{z_2}{\sqrt{3}} - \frac{y_2}{\sqrt{2}} \end{cases}$

141. $7y_2^2 - 2z_2^2 = \frac{8x_2}{\sqrt{14}}$. Гиперболич. параболоидъ.

142. $x_2^2 + 2y_2^2 - 3z_2^2 = +12$. Однополый или двуполый гиперболоидъ

143. $2y_2^2 + 3z_2^2 = \sqrt{6}x_2$. Эллипт. параболоидъ

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_2; \quad y_1 = -\frac{2}{\sqrt{6}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}z_2;$

$z_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}z_2.$

144. $\sqrt{6}(2y_1^2 + 3z_1^2) = 3x_1.$

145. $3\sqrt{6}(y_1^2 + z_1^2) = 2x_1.$

196. $y'^2(\sqrt{3}+1) - z'^2(\sqrt{3}-1) = 1,$

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{\sqrt{2}} + \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{18+10\sqrt{3}}}\,y' + \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{18-10\sqrt{3}}}\,z', \\ y = -\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{18+10\sqrt{3}}}\,y' + \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{18-10\sqrt{3}}}\,z, \\ z = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{18+10\sqrt{3}}}\,y' + \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{18-10\sqrt{3}}}\,z'. \end{cases}$$

197. $\lambda = \pm 1,\ \mu = \pm\sqrt{2}$ **198.** $ab + ac + bc = 0.$

199. $\dfrac{x + \dfrac{(1+\lambda)(1-\lambda)^2}{\lambda^2}}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z - \dfrac{1}{\lambda}}{-\lambda}.$

200. $\begin{cases} 1.\ \lambda = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2x = (\sqrt{5}-1)\,y,\ z = 0 \\ 2.\ \lambda = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\ 2x = -(\sqrt{5}+1)\,y,\ z = 0 \end{cases}$

201. $-\infty < m < -1$, эллипсоидъ; $m = -1$, эллиптическій цилиндръ, $-1 < m < \frac{1}{2}$; однополый гиперболоидъ, $m = \frac{1}{2}$ конусъ; $\frac{1}{2} < m < 1$, двуполый гиперболоидъ. $m = 1$, мнимыя плоскости $1 < m < \infty$, эллипсоидъ.

202. 1. $5\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - (\lambda + 2\mu + 1)^2 = 0$; 2. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$; $x + 2y - z = 0$.

203. $14x_1^2 + 7(1+\sqrt{29})\,y_1^2 + 7(1-\sqrt{29})\,z_1^2 = 1.$

204. $x = 1,\ y = 0.$

205. $xy + xz + yz + a^2 = 0$; упрощенное уравн. $x_2^2 + y_2^2 - 2z_2^2 = 2a^2$, уравненіе оси OZ_2: $x = y = z$

206. Шаръ $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$; упрощенное уравн. $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

207. $x^2 - y^2 + 2kxy - 4cz(1+k^2) = 0$, упрощ. ур. $y_1^2 - x_1^2 = 4cx_1\sqrt{1+k^2}$.

208. $\begin{cases} x^2 + z^2 - \dfrac{xy}{m} = c^2, \text{ упрощ. ур.} \\ x_2^2 + \dfrac{y_2^2}{2}\left(1 + \sqrt{1+\dfrac{1}{m^2}}\right) + \dfrac{z_2^2}{2}\left(1 - \sqrt{1+\dfrac{1}{m^2}}\right) = c^2. \end{cases}$

209. $z^2 + 2cx - c^2 = 0$; упрощ. ур. $z_2^2 + 2cx_2 = 0$

210. $x^2 + y^2 - (a^2 + a_1^2)\,z^2 - 2(ab + a_1b_1)\,z = b^2 + b_1^2$,

упрощ. ур. $x_2^2 + y_2^2 - (a^2 + a_1^2)\,z_2^2 + \dfrac{(ab + a_1b_1)^2}{a^2 + a_1^2} = b^2 + b_1^2$.

211. $\begin{cases} x = y - z \\ x = y - \dfrac{z}{2}; \\ x = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{0} \end{cases}$ $x_1^2 + y_1^2 - 2z_1^2 = 0$. Конусъ вращенія

212. $\dfrac{x}{z-a}\cos\alpha + \dfrac{y}{z+a}\cos\beta + \cos\gamma = 0$. Гиперб. параболоиды, главное направл.

$\dfrac{y}{x} + \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = 0,\ z = 0$

213. 1) гиперб. параб. $y_2^2 - z_2^2 = \dfrac{2a}{p}\,x_2$.

2) гиперб. параб. $x_2^2 - z_2^2 = \dfrac{2a}{p}\,y_2$.

3) парабол. цилиндръ $z_2^2 = \dfrac{a}{p}\,x_2$.

214. Если a, b, c оси симметріи и линейный эксцентриситетъ эллипса, начало координатъ въ фокусѣ и $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ данное плоское сѣченіе, — то уравненіе конуса $x^2 + y^2 + z^2 = \left(\dfrac{ex + b^2(\alpha x + \beta y + \gamma z)}{a}\right)^2$.

215. $4(x+y+z)^2 - 3(2x-y-z)^2 + (y-z+1)^2 = 1.$

216. $x+y+z)^2 + 4(x-y) = 9 = 0.$

217. 1. $2x - 2y + (\sqrt{28} - 4)(2x - z) = 0$; 2. $2x - 2y - (\sqrt{28} + 4)(2x - z) = 0.$

218. $x = \frac{1}{8},\ y = -\frac{1}{2},\ z = \frac{11}{8}.$ **219.** $\frac{\alpha}{a^2}x + \frac{\beta}{b^2}y + \frac{\gamma}{c^2}z = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma}{c^2}$

220 1. $\{(1+\sqrt{33})x + 16y - (30 + 6\sqrt{33})z = 0.$
2. $\{(1-\sqrt{33})x + 16y - (30 - 6\sqrt{33})z = 0$

221. $x - y = 0,\ x + y - 2z = 1.$ **222.** $(1 + \sqrt{3})x - 2(2 + \sqrt{3})y - 1 = 0.$

223. $y + 2z = 0.$

224. $\frac{x}{a^2}(x - x_1) + \frac{y}{b^2}(y - y_1) + \frac{z}{c^2}(z - z_1) = 0.$

225. $O(0, 0, 0)$ **226.** $2x - y - 4z = 0.$

227. $\left(\frac{2}{3} \mp \frac{\sqrt{14}}{3},\ \frac{2}{3},\ 1 + \frac{\sqrt{14}}{3}\right)$ **228** $x^2 + aky = const.$

229. $x + 1 = 0,\ y + 1 = 0.$ **230.** $\begin{cases} z - 1 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} z - 1 = 0 \\ 3x + 4y - 4 = 0. \end{cases}$

231. $\begin{cases} y + x - z = 0. \\ x - 1 = 0 \end{cases}$ **232** $\begin{matrix} x - y = 1 = 0. \\ x - z = 2 = 0 \end{matrix}$

233. $\begin{cases} x^2 + 3y^2 + 12z^2 - 2x - 12y - 72z + 109 = 0 \\ 2x + 3z\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \end{cases}$ и
$\begin{cases} x^2 + 3y^2 + 12z^2 - 2x - 12y - 72z + 109 = 0 \\ 3\sqrt{2}z - 2x = 9\sqrt{2} \end{cases}$

234. 1. $z = \alpha$; 2. $\lambda x + \mu y + z = \beta.$

235. 1. $y - x(3 + \sqrt{8}) = \alpha$, 2. $y - x(3 - \sqrt{8}) = -\alpha.$

236. 1. $(b^2 - a^2 + b^2)z = \alpha$; $(a^2 + b^2 - 1)z + 2ax + 2by = \beta.$

237. $\lambda = 1$; $\mu = 1$ **238.** Однополый гиперболоидъ или конусъ.

239. Гиперболоидъ вращенія **240.** $x^2 + y^2 + z^2 \pm \sqrt{3}\,xz - yz - 1 = 0$

241. Гипербола, расположенная въ плоскости ZOX.

242. $\sin\varphi \sin\varphi_1 = \frac{b^2c^2}{a^2(b^2 + c^2)}$

243. Діаметры, сопряженные съ плоскостями круговыхъ сѣченій.

244. $y = 0,\ z^2 = p(p - 2x).$

245. $x^2 + y^2 + z^2 - 4ax - 4by - 2cz + 2z\frac{a^2 + b^2}{c} - R^2 = 0.$

246. $x - 2y + z = 0,\ x - y(1 + \sqrt{3}) = 0,\ 2x - 2y + z = 0,\ x - y(1 - \sqrt{3}) = 0.$

247. $4x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ **248** $y^2 - z^2 - x = 0.$

249. $x - y - z = k\sqrt{2}(\sqrt{3} - y + z)$; $x - y - z = \frac{1}{k}\sqrt{2}(\sqrt{3} + y - z)$

250. $\begin{cases} x + 1 = kz \\ y + z + 1 = \frac{1}{k} \end{cases}$ $\begin{cases} x + 1 = \frac{1}{k} \\ y + z + 1 = kz \end{cases}$

251. $\begin{cases} y + 2z + 2 = k \\ 2x - y = \frac{1}{k} \end{cases}$ **252.** $\begin{cases} x - z + 2 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} z - 1 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0. \end{cases}$

253. $\begin{cases} 2y + \eta z = \frac{2 + \varepsilon\sqrt{6}}{2}(x - 8y - 8z - 2), & \eta = \pm 1 \\ 2y - \eta z = 2 - \varepsilon\sqrt{6}, & \varepsilon = \pm 1 \end{cases}$

254. Искомая точка лежитъ въ плоскости $x = \frac{q - p}{2}$.

255. $\begin{cases} 9y^2 - 4z^2 = x \\ x = \frac{5}{144} \end{cases}$ **256.** $9x - 7y + 2z - 1 = 0.$

257. $\frac{x}{2} = \frac{y}{\frac{1}{k} - k} = \frac{z}{\frac{1}{k^2} + k}$, гдѣ $k = \frac{-1 \pm 2\sqrt{1 - u^2}}{1 - 2u}$.

258. $\varphi = arctg(1 + \sqrt{2})$, 60°, 60°, 45°.

259 1. $n^2(x^2 + y^2 - R^2) + (l^2 + m^2)z^2 - 2ln\,xz - 2mn\,yz + 2\lambda z = 0$, гдѣ λ перемѣн-

ный параметръ. 2. Кривая 2-го порядка, лежащая въ плоскости $mx + ly + n = 0$

260. $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{R^2 + r^2}{R^2} xz - 2Rx - 2rz = 0.$

261. $x = -\frac{2p^2}{p}$, $y = 0$, $z = 2p$

262. $z^2 + 3xz - yz + 6x + 2y - 4 = 0.$

263. $y^2 - 2x + z = 0.$

264. $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 5x - 3z = 0.$

265. Эллипсъ.

266. Плоская кривая 4-го порядка $z = 2R(y^2 - 2px)(y^2 + p^2) - 4p^2R^2$.

267. Окружность, лежащая въ плоскости ZOX.

ОТДѢЛЪ III.

1. $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$.

2. $\frac{\alpha-\beta}{2}$.

3. $\frac{3}{2}$.

4. $-\frac{3}{2}$.

5. $\frac{1}{k}$.

6. $\frac{1}{2}$

7. 1.

8. $-\frac{15}{2}$.

9. $\frac{3}{2}$.

10. $\frac{1}{2}$.

11. $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$.

12. $-\frac{1}{4}$.

13. 0.

14. 0.

15. $\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

16. $\frac{2}{k\sqrt[k]{a^{k-1}}}$.

17. $2m$

18. $\frac{1}{2\sqrt{a-b}}$

19. $\lambda=\sum_{i=1}^{k}\sqrt{a_i}$, $\mu=\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{2\sqrt{a_i}}$.

20. $\lambda=-1$, $\mu=0$.

21. $\frac{1}{2}$.

22. $\frac{1}{\sqrt[3]{\beta^2-\alpha^2}}$.

23. 0.

24. $\frac{2m}{\pi}$.

25. $\frac{2}{\pi}$

26. $\frac{3}{2}$.

27. $\frac{1}{a-b}$

28. e^{-2}

29. $e^{\frac{a-b}{p}}$

60. e^3.

31. $e\sqrt[k]{e}$

32. $e^{\frac{p}{q}}$.

33. $\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}$

34. $\frac{2}{3}\sqrt[6]{a}$.

35. e^{π}.

36. e^{-1}.

37. $\frac{a}{b}$

38. $e^{\lambda x}$.

39. $e^{\frac{x^2}{2}}$.

40. $e^{\frac{3}{2}}$.

41. 1.

42. 1.

43. $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$.

44. $\log a$.

45. $\log a$.

46. $(\log a)^2$.

47. 1.

48. $-\frac{\pi^2}{2}$

49. 2π.

50. 1.

51. $\frac{\alpha}{\beta}$.

52. 0.

53. 0.

54. 0.

55. 0.

58. $\frac{2^p}{p+1}$.

59. 0.

63. $\lim\limits_{n=\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right\}=\frac{1}{4}$.

64. $\lim\limits_{n=\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right)=\frac{1}{9}$.

66. $\lim\limits_{n=\infty} P_n=\sqrt{e}$.

67. $\lim\limits_{n=\infty} P_n=\log 2$.

68. $\lim\limits_{n=\infty} P_n=\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$.

69. $\frac{\alpha}{4}$.

70. $e^{-\frac{a^2}{6}}$.

71. $\frac{2}{\pi}$.

72. $\lim\limits_{n=\infty} P_n=\frac{1}{2}$

73. $\lim\limits_{n=\infty} P_n=\frac{2}{3}$.

74. $\lim\limits_{n=\infty} P_n=\frac{1}{3}$.

75. $\lim\limits_{n=\infty} P_n=\frac{1}{1-x}$.

76. $\lim\limits_{n=\infty} P_n=\frac{\sin x}{x}$

77 $\lim\limits_{n=\infty} P_n=\frac{\operatorname{sh} x}{x}$.

78. $\lim\limits_{n=\infty} x_n=\frac{x_1+2x_2}{3}$.

79. $\begin{cases} a_n=a_0+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \\ b_n=a_0+\frac{2}{3}(b_0-a_0)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right)\end{cases}$ $\lim\limits_{n=\infty} a_n=\lim\limits_{n=\infty} b_n=\frac{a_0+2b_0}{3}$.

80 $\begin{matrix} a_n=\sqrt{a_0b_0} \\ a_n+\sqrt{a_0b_0}\end{matrix}=\left(\frac{a_0-\sqrt{a_0b_0}}{a_0+\sqrt{a_0b_0}}\right)^{2^n}$; $a_nb_n=a_0b_0$, $\lim\limits_{n=\infty} a_n=\lim\limits_{n=\infty} b_n=\sqrt{a_0b_0}$

82. $\lim\limits_{n=\infty} x_n=\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$.

83. $\lim\limits_{n=\infty} y_n=1-\sqrt{1-x}$.

87 $\begin{cases} 1.\ \text{Если } 0<a_0<b_0,\ \text{то } \lim\limits_{n=\infty} a_n=\lim\limits_{n=\infty} b_n=\frac{\sqrt{b_0^2-a_0^2}}{\arccos\frac{a_0}{b_0}}. \\ 2.\ \text{Если } 0<b_0<a_0,\ \text{то } \lim\limits_{n=\infty} a_n=\lim\limits_{n=\infty} b_n=\frac{\sqrt{a_0^2-b_0^2}}{\log\left(\frac{a_0}{b_0}+\sqrt{\left(\frac{a_0}{b_0}\right)^2-1}\right)}. \end{cases}$

88. $\lim\limits_{n=\infty} y_n=\sqrt{1+x}-1$.

90. $\lim\limits_{n=\infty} x_n=0$.

92. Графикъ состоитъ изъ отрѣзковъ 2-хъ прямыхъ.

93. $y=x$, если $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$,
$y=\pi-x$, » $\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{3\pi}{2}$,
$y=x-2\pi$, » $\frac{3\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{5\pi}{2}$
и т. д.

94. $y=x$, если $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$,
$y=\pi-x$, » $\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{3\pi}{2}$,
$y=x-2\pi$, » $\frac{3\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{5\pi}{2}$
и т. д.

95. $y = x$, если $0 \leq x \leq \pi$,
$y = 2\pi - x$, » $\pi < x < 2\pi$,
$y = x - 2\pi$, » $2\pi \leq x \leq 3\pi$.
и т. д.

96. $y = x$, если $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}$,
$y = x - \pi$, » $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$,
$y = x - 2\pi$, » $\frac{5}{2} < x < \frac{7\pi}{2}$.
и т. д.

97. $y = -\frac{3\pi}{4}$, если $-\infty < x < -1$, $y = \frac{\pi}{4}$, если $-1 < x < +\infty$.

98. $z = \arcsin(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}) + \varepsilon\pi$,

где $\varepsilon = 0$, если $xy < 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$, $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$

$\varepsilon = +1$, если $x^2 + y^2 > 1$ и $x < 0$; $z < \frac{\pi}{2}$

$\varepsilon = -1$ если $x^2 + y^2 > 1$ и $x > 0$; $z > \frac{\pi}{2}$.

99. $z = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy} + \varepsilon\pi$,

где $\varepsilon = 0$, если $xy < 1$, $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$

$\varepsilon = +1$, если $xy > 1$ и $x < 0$; $z < -\frac{\pi}{2}$

$\varepsilon = -1$, если $xy > 1$ и $x > 0$; $z > \frac{\pi}{2}$

100. $y = 2\pi - \arccos\left(x\sqrt{3(1 - x^2)} + x^2 - \frac{1}{2}\right)$, если $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$.

$y = \arccos\left(x\sqrt{3(1 - x^2)} + x^2 - \frac{1}{2}\right)$, » $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$y = \frac{\pi}{3}$, » $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

101. Когда x квадрат цѣлаго числа.

103. π.

104. $y = Ex$ (Ex — цѣлой части x).

105. $(-\infty, +\infty)$

106. $a = 0$.

107. y въ промежуткѣ $0 \leq x < +\infty$; z въ промежуткѣ $-\infty < x < +\infty$

108 y въ промежуткахъ $1 \leq x < \infty$, $-\infty < x \leq -1$ z въ промежуткахъ $1 < x < \infty$, $-\infty < x < -1$ и u въ промежуткѣ $1 < x < \infty$.

109 $1{,}64 < y < 1{,}65$.

110 $1{,}10516 < y < 1{,}10517$.

111. $4{,}11 < x < 4{,}12$.

115. $y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$.

116. $y' = 2\cos(x^2) \cdot x$

117 $y' = -\sin\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\cos\frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

118. $y' = 2\cos \operatorname{tg} a^{(x^2)} \cdot \frac{a^{(x^2)} \cdot \log a}{\cos^2 a^{(x^2)}}$.

119. $y' = -6\frac{\cos\cos^2 3x \cos 3x - \sin 3x}{\sin\cos^2 3x} \log e$.

120. $y' = \frac{1}{2\arcsin\frac{x}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} + \frac{2x}{1 + x^4}$

121. $y' = \frac{1}{1 - x^2} + \frac{x\arccos x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

122. $y' = \sin x \cdot x^{\sin x - 1} + x^{\sin x}\log x \cos x$

123. $y_0 = 0{,}69315$.

124. $y' = e^x[\sin x \cos^2 x + \cos^3 x - 2\sin^2 x \cos x]$.

125. $y' = \frac{e^x[\sin x + x\sin x \log x - \sin x \log x - x\log x \cos x]}{x^2 \sin^2 x}$

126. $y' = \frac{1 - x^2}{(1 - x + x^4)\sqrt{1 - x^2 + x^4}}$.

127 $y' = 1 - \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{x(\operatorname{arctg} x)^{x-1}}{1 + x^2} + (\operatorname{arctg} x)^x \log \operatorname{arctg} x$.

128. $y' = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

129. $y' = \dfrac{6 \arcsin \sin^2 \operatorname{arctg}^2\left(\frac{x}{2}\right) \sin \operatorname{arctg}^2\left(\frac{x}{2}\right) \cos \operatorname{arctg}^2\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1 - \sin^4 \operatorname{arctg}^2 \frac{x}{2}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)}$

130. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, если $-1 < x < 0$,

$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, » $0 < x < 1$

131. $y' = -1$, если $2k < x < (2k + 1)\pi$; k цѣлое число.
$y' = +1$, » $(2k + 1)\pi < x < (2k + 2)\pi$

132. $y = +1$, если $(4k - 1)\frac{\pi}{2} < x < (4k + 1)\frac{\pi}{2}$, k цѣлое число

$y' = -1$, » $(4k + 1)\frac{\pi}{2} < x < (4k + 3)\frac{\pi}{2}$

133. $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$, если $x < -1$, $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$, если $x > 1$.

134. $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$, если $x < -1$, $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$, если $x > 1$.

135. $y' = \dfrac{3}{\sqrt{1 - x^2}}$, знакъ одинаковъ со знакомъ $4x^2 - 1$.

136. $y' = x^2\sqrt{1 + x}$.

137. $y' = \dfrac{1}{(x + 4)\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$

138. $y' = \dfrac{1}{(x + 2)(x - 3)}$.

139. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

140. $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

141. $y' = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

142. $y' = \dfrac{(\sqrt{x} + 1)^2}{2x\sqrt{x}}$.

143. $y' = \dfrac{1}{(4 - 3x^2)\sqrt{3 + 4x^2}}$

144. $y' = \dfrac{x^8 - x^4 - 6}{x^2}$

145. $y' = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^3}$

146. $y' = \dfrac{1}{(x + a)^2(x^2 + a^2)}$.

147. $y' = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$.

148. $y' = x^3(\log x)^2$.

149. $y' = tg^3 x$.

150. $y' = \dfrac{1}{\sin x}$.

151. $y' = \dfrac{1}{\sin^3 x}$.

152. $y' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

153. $y' = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

154. $y' = tg^3 x$.

155. $y' = \dfrac{1}{\sin x \cos^2 x}$

156. $y' = \dfrac{x^2}{(1 - x^2)^2}$.

157. $y' = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 2ax + 3a^2}$

158. $y' = \dfrac{1}{3x^2 + 2x + 1}$

159. $y' = \dfrac{1}{(3 + x^2)\sqrt{4 - 3x^2}}$

160. $y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}$

161. $y' = \dfrac{1}{x^4 + 1}$.

162. $y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$.

163. $y' = \dfrac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$

164. $y' = \dfrac{1}{x(1 + x^3)}$.

165. $y' = \dfrac{1}{1 + x^2 + \sqrt{1 - x^2}}$

166. $y' = \dfrac{1}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}$

167. $y' = \dfrac{1}{1 - \sin^4 x}$.

168. $y' = \dfrac{1}{5 + 4\sin x}$

169. $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$, если $|x| < 1$. $y' = -\dfrac{2}{1 + x^2}$, если $|x| > 1$.

170. Если $x > \frac{1}{\sqrt{8}-2}$, то $y' = \frac{1}{x\sqrt{4x^2 - 4x - 1}}$.

Если $x < \frac{1}{\sqrt{8}+2}$, то $y' = \frac{1}{x\sqrt{4x^2 + 4x - 1}}$.

171. $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ при $a > 0$ и $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ при $a < 0$.

172. $y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \log \frac{a+bx}{a-bx}$ при $a > 0$,

$y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \log \frac{a+bx}{a-bx} + \frac{4a(a^2-b^2)}{b\sqrt{1-x^2}(a^2-b^2x^2)}$ при $a < 0$.

173. $y' = -1$, если $x < 0$; $y' = 1$, если $x > 0$.

174. $y = \frac{x^2 b}{2a}$, при $0 \leqq x < a$, $y = \frac{x^2 c}{2a} - \frac{ac}{2} + \frac{ab}{2}$, при $a \leqq x < \infty$.

$y' = \frac{xb}{a}$, при $x < a$, $y' = \frac{xc}{a}$, при $x > a$; при $x = a$, производная не существуетъ.

175. Если $0 \leqq x < \frac{3a}{2}$, то $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$;

» $\frac{3a}{2} \leqq x < \frac{5a}{2}$, » $y = \sqrt{4ax - x^2 - 3a^2}$,

» $\frac{5a}{2} \leqq x < \frac{11a}{2}$, » $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 4a)$,

» $\frac{11a}{2} \leqq x < \frac{13a}{2}$, » $y = -\sqrt{12xa - x^2 - 35a^2}$;

» $\frac{13a}{2} \leqq x < 8a$, » $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 8a)$.

176. Уравненія параболъ:

$$y = \frac{r\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{r}{2}\right) - \frac{4}{r\sqrt{27}}\left(x + \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(5r - x - \frac{4x^2}{r}\right),$$

$$y = \frac{r\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{r}{2}\right) - \frac{4}{r\sqrt{27}}\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(5r - x - \frac{4x^2}{r}\right).$$

177. $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cos x - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\sin x + 2x\frac{\partial\varphi}{\partial w}$.

178. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{cotg}\varphi$.

179. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$.

180. $\frac{dy}{dx} = \frac{2 - t^3}{1 - 2t^3}$.

181. $\frac{dy}{dx} = -\frac{n}{m}\operatorname{cotg} t$.

182. $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg}\frac{(k+1)t}{2}$.

183. $\frac{dy}{dx} = -1$.

184. $\frac{dy}{dx} = -1$, если $t < 0$; $\frac{dy}{dx} = 1$, если $t > 0$.

185. При $-1 \leqq t < 0$, $y' = 1$; при $0 < t \leqq 1$, $y' = -1$.

186. $y - 1 = 2(x - 2)$.

187. $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

188. $y = 6x$, $x = 6y$.

189. $y_x' = \frac{1}{t}$, $y_x'' = -\frac{1}{2t^3}$.

190. $f^{IV}(u)\,du^4 + 6f'''(u)\,du^2 d^2u + 3f''(u)\,d^2u^2 + 4f''(u)\,du\,d^3u + f'(u)\,d^4u$.

191. $y^{(8)} = \frac{3}{5}\,1.2.3.4.5.6.7.8$.

192. $y^{(m)} = (-1)^m \frac{1.2.3\ldots m}{(x-a)^{m+1}} f(a)$.

193. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2^n}\,1.3.5\ldots(2n-1)\cdot\frac{a^n}{\sqrt{(ax+b)^{2n+1}}}$.

194. $2^{22}e^{2x}(8x^3 + 300x^2 + 3600x + 13800)$.

195. $u_m^{(k)} = 0$ при $m < k$; $u_m^{(k)} = m(m-1)\ldots(m-k+1)x^{m-k}$, при $m \geqq k$.

196. $k(k-1)\ldots(k-n+1)x^{k-n}\left[\log x+\frac{1}{k-n+1}-\frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{(k-n+1)(k-n+2)}+\right.$
$\left.+\frac{1}{3}\frac{n(n-1)(n-2)}{(k-n+1)(k-n+2)(k-n+3)}-\ldots\right]$.

197. $y^{(n)}=x^2a^n\sin\left(ax+n\frac{\pi}{2}\right)+2na^{n-1}x\sin\left(ax+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)+$
$+n(n-1)a^{n-2}\sin\left(ax+(n-2)\frac{\pi}{2}\right)$.

198. I. $y^{(n)}=e^{2x}\left\{2^{n-1}+2^{\frac{3n-2}{2}}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{4}\right)\right\}$,

II. $y^{(n)}=e^{2x}\left\{2^{n-1}-2^{\frac{3n-2}{2}}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{4}\right)\right\}$.

199. $y^{(n)}=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots n-1}{x}$.

200. $y^{(n)}=\frac{3^n\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)+3\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}{4}$.

201. Если опредѣлить φ изъ условій: $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt[n]{a^2+b^2}}$,
$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\pi<\varphi\leqq\pi$, то $y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\varphi)$.

202. Если опредѣлить φ изъ условій $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt[n]{a^2+b^2}}$;
$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\pi<\varphi\leqq\pi$, то $y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos(bx+n\varphi)$.

203. $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)\left\{\frac{1}{(x-1)^n}+\frac{1}{(x-2)^n}\right\}$.

204. $y^{(n)}=(-1)^n\cdot1\cdot2\cdot3\ldots n\left\{\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{x^{n+1}}-\frac{n+1}{x^{n+2}}\right\}$.

205. $(-1)^n(\beta\gamma-\alpha\delta)\gamma^{n-1}\frac{1\cdot2\ldots n}{(\gamma x+\delta)^{n+1}}$.

206. $y^{(n)}=(-1)^n\cdot1\cdot2\cdot3\ldots n\left\{\frac{2}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{x^{n+1}}\right\}$.

207. $y^{(n)}=(-1)^n\cdot1\cdot2\cdot3\ldots n\left\{\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{x^{n+1}}\right\}$, при $n\geqq2$.

208. $y^{(n)}=\frac{(-1)^n}{2a}1\cdot2\cdot3\ldots n\left\{\frac{1}{(x-a)^{n+1}}-\frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right\}$.

206. *Указаніе:* Непосредственно составить y' и y'' и воспользоваться затѣмъ методомъ индукціи.

210. $(-1)^{n-1}\cdot1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)\frac{c_n^1x^{n-1}-c_n^3x^{n-3}+c_n^5x^{n-5}\ldots}{(1+x^2)^n}=$
$=1\cdot2\ldots(n-1)\cos^n y\cos\left(ny+\frac{n-1}{2}\pi\right)$, гдѣ c_n^m число сочетаній изъ n элементовъ по m.

211. $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos(bx+c+n\alpha)$; $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+n\alpha)$,
гдѣ $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

212. $y^{(n)}=\frac{1}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

213. $y^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

214. $P\ e^{zx}\left[\omega(z)\varphi(x) + \frac{\omega'(z)\varphi'(x)}{1} + \frac{\omega''(z)\varphi''(x)}{1\,.\,2} + \ldots + \frac{\omega^{n}(z)\varphi^{(n)}(x)}{1\,.\,2\,.\ldots n}\right]$,
где $\omega(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$.

216. $u_{2n} = 2\,.\left\{2\,.\,4\,.\,6\,.\ldots(2n-2)\right\}^2$, $u_{2n+1} = 0$.

218. $u_{2k+1} = 0$, $u_{2k+1} = (-1)^k \mu(\mu^2 - 1)(\mu^2 - 3^2)\ldots(\mu^2 - (2k-1)^2)$

219. $P_n(x) = (-1)^n\left[(2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \right.$
$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}(2x)^{n-4} - \ldots\right]$.

222. $P_n(x) = 1 + \frac{n}{1}(n-1)x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-1)(n-2)x^2 +$
$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(n-1)(n-2)(n-3)x^3 + \ldots$

224. $P_n(x) = (-1)^n\left(x^n - \frac{n^2}{1}x^{n-1} + \right.$
$\left. + \frac{n^2(n-1)^2}{1\,.\,2}x^{n-2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1\,.\,2\,.\,3}x^{n-3} + \ldots\right)$.

229. $du = (6x - 3y^2)\,dx + (-6yx + 9y^2)\,dy$.

230. $du = \sin(x+y+z)\,d(x+y+z)$ **231.** $du = \frac{\operatorname{Log} e}{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}\cdot\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$.

232. $du = \frac{2(y\,dx - x\,dy)}{y(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}$.

233. $du = y^x z^{(y^x)}\left(\log y \log z\,dx + \frac{x}{y}\log z\,dy + \frac{dz}{z}\right)$.

234. $du = \frac{2(y\,dy - x\,dy)}{y(x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}$, если $y > 0$.

235 $du = \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}$, $d^2u = -\frac{2x\,dx^2}{(1+x^2)^2} - \frac{2y\,dy}{(1+y^2)^2}$.

236. 0. **237.** $(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz}$.

238. $\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \varphi^{(n)}(x)$, $\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \psi^{(n)}(y)$, $\frac{\partial^n u}{\partial z^n} = \omega^{(n)}(z)$, остальныя равны нулю.

239 $du = \varphi'(xy)(x\,dy + y\,dx)$, $d^2u = \varphi'(xy)(x\,dy + y\,dx)^2 + 2\varphi'(xy)\,dx\,dy$.

240. $du = \varphi'(x^2 + y^2 + z^2)(2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz)$.
$d^2u = \varphi''(x^2 + y^2 + z^2)(2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz)^2 + \varphi'(x^2 + y^2 + z^2)(2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2)$.

243. $d^n u = \varphi^{(n)}(ax + by + cz)(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^n$,
$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \varphi^{(n)}(ax + by + cz)a^n$, $\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y} = n\varphi^{(n)}(ax + by + cz)\,a^{n-1}b, \ldots$

244. $d^2y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}dw^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}du\,dv + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial w}du\,dw +$
$+ 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial w}dv\,dw + \frac{\partial\varphi}{\partial u}d^2u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}d^2v + \frac{\partial\varphi}{\partial w}d^2w$.

245. $d^2t = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}dw^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}du\,dv + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial w}du\,dw +$
$+ 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial w}dv\,dw + \frac{\partial\varphi}{\partial u}d^2u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}d^2v + \frac{\partial\varphi}{\partial w}d^2w$.

246. $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = b^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}$, $\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y} = ab\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}$, $\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial z} = ac\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial w}$,
$\frac{\partial^2 t}{\partial y\partial z} = bc\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial w}$.

247 Производныя найдемъ, сравнивая коэффиценты при дифференціалахъ въ равенствѣ

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 t}{\partial y\partial z}dy\,dz =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(a_1dx + b_1dy + c_1dz)^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}(a_2dx + b_2dy + c_2dz)^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}(a_1dx + b_1dy + c_1dz)(a_2dx + b_2dy + c_2dz).$$

248. Производныя найдемъ, сравнивая коэффиценты при дифференціалахъ въ равенствѣ

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}dy^2 = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(2xdx + 2ydy)^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}(2xdx + 2ydy)(xdy + ydx) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}(xdy + ydx)^2 +$$

$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial u}(2dx^2 + 2dy^2) + 2\frac{\partial\varphi}{\partial v}dxdy.$$

249. $d^4u = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\,\{dx^4 + 4\,dx^3dy + 2\,dxdy^2dz - 3\,(dx\,dy\,dz^2 + dz^4)\}$.

250. $d^4u = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\,\{dx^4 + 3\,dx^2dy + dz^4\}$.

264. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2}{u(y^2 - x^2) + 2xy}$.

265. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{2 - y}$.

266 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{2\sin 2y - \sin y - x\cos y}$.

267. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2y\sin y + y^2}{1 - \cos y - y\sin y}$.

268. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

[illegible] $a > 0,\ y = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y},\quad y' = \frac{a}{y^2}$.

$a < 0,\ y' = -\frac{y}{\sqrt{2ay - y^2}},\quad y'' = \frac{ay^2}{(2ay - y^2)^2}$.

270. $dy = \frac{2x}{3y}dx,\quad d^2y = \frac{4(3y^2 + 2x^2)}{15y^3}dx^2,\quad dz = \frac{x}{5z}dx,\quad d^2z = \frac{5z^2 - x^2}{25z^3}dx^2$

271. $x' = 5,\ x'' = 20,\ y' = 3,\ y'' = 12$.

272. Если $a > b$, кривая не проходитъ черезъ точку (0, 0), такъ какъ эта точка изолирована. Если $a = b$, то $y' = 0$. Если $a < b$, то $y = \pm\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}}$.

273. $y' = \pm 1$.

274. $(y - b)\,y^{IV} + 4y\,y''' + 3\,(y'')^2 = 0$.

275. $y' = 1,\ y'' = -\frac{7}{2}$.

276. $y' = \frac{1}{3}$.

277. $\frac{\partial z}{\partial x} = -tg\,x,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -tg\,y$.

278 $\frac{dy}{dx} = \frac{z - x}{y - z},\quad \frac{dz}{dx} = \frac{x - y}{y - z}$.

279. $y = 1,\ y' = -\frac{2}{3},\ z' = 0,\ z'' = -\frac{2}{3}$.

280. $y' = 4.\ y'' = 15,\ z' = \frac{3}{2},\ z'' = -\frac{37}{8}$.

281 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u^2 - x^2}{u^2 - z^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{u^2 - y^2}{u^2 - z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z^2 - x^2}{u^2 - z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z^2 - y^2}{u^2 - z^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\,\frac{u(x^2 - z^2)^2 + x(u^2 - z^2)^2 + z(u^2 - x^2)^2}{(u^2 - z^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 2\,\frac{u(x^2 - z^2)(z^2 - y^2) + z(u^2 - x^2)(u^2 - y^2)}{(u^2 - z^2)^3}$$

282. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{z + 1},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{z + 1},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{2y(x - 2)}{(z + 1)^3}$.

283. $dz = -\frac{z(z\log z + y)}{x(z\log y + x)}dx - \frac{z(y\log x + z)}{x(z\log y + x)}dy$.

284. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos y - z\sin x}{y\sin z - \cos x},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\sin y - \cos z}{\cos x - y\sin z}$.

5. $dz = \frac{y+z}{x+y}dx - \frac{z+x}{x+y}dy,$

$d^2z = \frac{2(y+z)}{(x+y)^2}dx^2 + \frac{4z}{(x+y)^2}dx\,dy + \frac{2(z+x)}{(x+y)^2}dy^2,$

$d^3z = \frac{6(y+z)}{(x+y)^3}dx^3 - \frac{6(y+3z)}{(x+y)^3}dx^2dy - \frac{6(x+3z)}{(x+y)^3}dx\,dy^2 - \frac{6(z+x)}{(x+y)^3}dy^3.$

$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = (-1)^n \cdot n!\frac{y+z}{(x+y)^n}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = (-1)^n \cdot n!\frac{z+x}{(x+y)^n}.$

7. $du = \frac{y-u}{x}dx + \frac{y-v}{x}dy; \quad dv = \frac{x-u}{y}dx + \frac{x-v}{y}dy,$

$d^2u = \frac{2y(y-u)}{(x+y)^2}dx^2 + \frac{2y(y-v+u-x)}{(x+y)^2}dx\,dy + \frac{2y(v-x)}{(x+y)^2}dy^2,$

$d^2v = -d^2u.$

3. $d^2z = \frac{4}{15}dx^2 + \frac{4}{15}dy^2.$

289. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{5}{18}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{1}{18}$

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{55}{32}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{25}{32}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = +\frac{25}{32}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{25}{32}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = -\frac{25}{32}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{55}{32}.$

. $\frac{dx}{dz} = \varphi'(t)\frac{1}{k}, \quad \frac{dy}{dz} = \psi'(t)\frac{1}{k}$

. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c}{a}\sin v \operatorname{cotg} u, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c}{b}\cos v \operatorname{cotg} u$

. $\frac{d^2x}{dy^2} + x = e^y.$

298. $\frac{d^3x}{dy^3} = 0$

. $\rho = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2x}{dy^2}}.$

300. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

. $t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0.$

302. $\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0.$

. $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$

304. a

. $\frac{r^2}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}$

306 $x + y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}$

$x\frac{dy}{dx} - y$

$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0.$

308 $\frac{d^3y}{dt^3} + by = 0.$

$\frac{d^2y}{dt^2} + 4n^2y = 0.$

310. $(1-t^3)\frac{d^2y}{dt^2} + (1-3t^2)\frac{dy}{dt} - ty = 0.$

$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{d^5y}{dx^5} - 45\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^4y}{dx^4} + 40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 0$

$\frac{d^2y}{dt^2} + a(e^{2t} + 1)y = 0.$

316 $\frac{d^2u}{dy^2} + u = 0$

$\frac{\partial z}{\partial u} = 0.$

318. $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$

$V = r\cos 2\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \sin 2\theta\frac{\partial u}{\partial \theta},$

$\frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2u\frac{\partial}{\partial u} + 2(v - r^3)\frac{\partial z}{\partial v} + u^2v^2z = 0.$

$u = xy, \quad v = \frac{1}{y}$

322 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = 0$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x}$

324. $\frac{\partial z}{\partial u} = 0.$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + z = 0.$

326. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$

$\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0.$

328 $V = e^{2u}\left(\cos^2 v\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$

329. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{1}{2}$

330. $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\omega}{4(u + v)^2} = 0$

331. $\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = 0.$

332. $\Delta_1 v = \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2$

333 $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

334. $\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0.$

335 $\Delta_1 v = \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2.$

336. $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cot g\, \theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$

337 $\begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx}, & \frac{dy_2}{dx}, & \frac{dy_3}{dx} \\ \frac{d^2y_1}{dx^2}, & \frac{d^2y_2}{dx^2}, & \frac{d^2y_3}{dx^2} \end{vmatrix}.$ **341** $\frac{dY}{dx} = x; \left(y = X\frac{dY}{dx} - Y\right).$

342. $\frac{\partial Z}{\partial X} = p, \frac{\partial Z}{\partial Y} = -y; \left(z = Z - \frac{\partial Z}{\partial Y} Y\right).$

343. Если $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $P = \frac{\partial Z}{\partial X}$, $Q = \frac{\partial Z}{\partial Y}$, $R = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$, $S = \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$, $T = \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$, то $P = x$, $Q = -y$, $R = \frac{t}{rt - s^2}$, $S = -\frac{s}{rt - s^2}$, $T = \frac{r}{rt - s^2}$

ОТДѢЛЪ IV.

1. $2 - 4(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4.$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} [1 + 2(-1)^n] x^n.$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[3 - 3n - \frac{7}{2^{n+1}}\right] x^n.$

4. $y = \frac{2x^3}{1.2.3} + \frac{4x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots + (-1)^n \frac{2nx^{2n+1}}{1.2.\ldots(2n+1)} + \ldots$

5. $y = 1 - 2\frac{x^2}{2!} + 2^3\frac{x^4}{4!} - 2^5\frac{x^6}{6!} + \ldots$

6. $\frac{2x^2}{1.2} - \frac{2^3x^4}{1.2.3.4} + \frac{2^5x^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots$

7. $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{3^{2k}+1}{(2k)!}x^{2k} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\frac{3^{2k+1}+1}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$

8. $bx + abx^2 + \frac{1}{1.2.3}(3a^2b - b^3)x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{[(a+bx)^n - (a-bx)^n]}{2x}x^n + \ldots$

9. $y = 1 - \frac{4}{4!}x^4 + \frac{4^2}{8!}x^8 - \frac{4^3}{12!}x^{12} + \ldots$

10. $1 + x\cot g\, a + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin a}\right)^2\cos 2a + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{x}{\sin a}\right)^n\cos na + \ldots$

11. $y = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots$

12. $y = 1 + \frac{3}{2}x + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\frac{4n-1}{2n}x^n + \ldots$

13. $1 - \frac{1}{2}x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{51}{48}x^3 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1.3.(2n-7)(8n^2-16n^2-10n+15)}{2.4\ldots 2n}x^n + \ldots$

14. $2\frac{1-x}{1+x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 - \ldots - \frac{2}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2n-1} + \ldots$

15. $y = \log 2 - \frac{3}{2}x - \ldots - \frac{2^n+1}{2^n}\cdot\frac{x^n}{n} - \ldots$

17. $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots$ $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$

18. $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)a^{2n-1}} + \ldots$

19. $y = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$

20. $y = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \ldots - \frac{1}{1.2\ldots(n-3)(n-2)n}x^n - \ldots$

21. $1 + \frac{3}{2}x + 2\left(\frac{x^2}{1.2.3} - \frac{x^3}{2.3.4} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{(n-1)n(n+1)} + \ldots\right).$

22. $x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^4 + \ldots$

23. $1 + (x + y) + \ldots + \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y} + \ldots$

24. $\sum\sum \frac{x^n y^m}{nm}$

25. $x - y - \frac{x^3 - y^3}{3} + \frac{x^5 - y^5}{5} - \ldots$

26. $\sum \frac{(x + y)^n - x^n - y^n}{n}$

27. $y = 2\left[\frac{x^2}{2} - \left(1 + \frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\frac{x^6}{6} - \ldots\right]$.

20. $y = \frac{x^2}{1} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\frac{x^6}{3} + \ldots$

29. $y = 1 - \frac{\mu^2}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots + (-1)^n \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)\ldots(\mu^2 - (2n-2)^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n} x^{2n} + \ldots$

$z = \frac{\mu}{1}x - \frac{\mu(\mu^2 - 1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots + (-1)^n \frac{\mu(\mu^2 - 1^2)\ldots[\mu^2 - (2n-1)^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n+1)} x^{2n+1} + \ldots$

30. $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \ldots$

31. $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}x^4 + \ldots$

32. $\frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + \ldots$

33. $1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{6}x^4 - \frac{5}{4}x^5 + \ldots$

34. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{12}x - \frac{1}{720}x^3 + \frac{1}{6 \cdot 42}x^5 + \ldots$

35. $n = 2$: $x^2 - \frac{1}{3}$; $n = 4$. $x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{45}$, $n = 6$: $x^6 - x^4 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{105}$

$n = 3$: $x^3 - \frac{1}{2}x$, $n = 5$: $x^5 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{72}x$, $n = 7$. $x^7 - \frac{7}{6}x^5 + \frac{119}{360}x^3 - \frac{149}{6480}x$.

36. $3{,}005 > x > 3{,}004$

37. $5\left\{1 + \frac{1}{5}\frac{4}{243} - \frac{1}{5}\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{243}\right)^2 + \ldots\right\} = 3{,}00981$.

38. $\sin 10^\circ = \sin 0{,}17453 = 0{,}17364$

39. $0{,}950 < x < 0{,}951$

40. $0{,}309 < x < 0{,}310$.

41. Примѣняя формулу задачи № 14 имѣемъ 0,693.

43. $a = -\frac{1}{6}$.

44. $\frac{1}{6}$.

45. $n = 3$.

46. $\frac{1}{2}$

47. $e^{-\frac{1}{2}}$.

48. $-\frac{1}{2}$.

49. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{11}{12}$.

50. $y = a - x\sqrt{1 + a^2} + \frac{a}{2}\left[x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6}x^6 - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{4 \cdot 6 \ldots 2n}x^{2n} + \ldots\right]$

51. $\sin mx = m\left[\sin x - \frac{m^2 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\sin^3 x + \frac{m^2 - 1)(m^2 - 9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\sin^5 x - \ldots\right]$

$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{1 \cdot 2}\sin^2 x + \frac{m^2(m^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\sin^4 x - \ldots$

52. $\frac{m}{e}$.

53. $3a$.

54. $\frac{a + b}{n}$.

55. 0.

56. 0.

57. $-\frac{e}{2}$.

58. 1.

59. $2m$.

60. 0.

61. $\frac{25}{2}$

62. $y = -e$.

63. $y = \frac{2}{1 - e}$.

64. $y = \frac{m^2}{2}$

65. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

1.

67. $\frac{1}{a}$.

68. $\frac{1}{6}$

69. 4.

70. $\frac{1}{3}$.

71. $y = 2$

72. $\frac{1}{6}$.

73. 1.

74. 0.

75. 1.

76. 0.

77. 1.

78. 1.

79. 1.

80. 0.

81. 0

82. $\frac{1}{2}$.

83. $y = \frac{1}{a}$

84. $\frac{2}{\pi}$.

85. $(\log x \log(1-x))_{x=1} = 0$.

86. $-\frac{5}{3}$.

87. $\frac{1}{60}$.

88. $y = \frac{1}{2}$.

89. $\frac{\pi^2}{8}$.

90. $\frac{2}{3}$.

91. $\frac{1}{3}$.

92. $-\frac{1}{3}$.

93. $\frac{\pi^2}{6}$.

94. $\frac{1}{60}$.

95. $-\frac{1}{2}$

96. $\frac{1}{a \log a}$.

97. e^{2a}.

98. 1.

99. e^{-10}.

100. $a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n$.

101. e^{2m^2n}.

102. $y_2 = 1$.

103. $y_1 = e^{-a}$.

104. e^{π}

105. e^{3}.

106. $e^{-\frac{1}{6}}$.

107. e^2.

108. e^{r}.

109. $+\infty$.

110. 1.

111. 1.

112. e.

113. $e^{-\frac{7}{p+7}}$.

114. $\frac{1}{4} tg^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

115. 0.

116. $Pc + \frac{ql^2}{8}$.

117. Мах. при $x = \frac{\pi}{4}$, min. при $x = \frac{5\pi}{4}$.

118. Мах. при $x = \frac{5\pi}{4}$; min. при $x = \frac{\pi}{4}$.

119. При $x = e$, мах.

120. Мах. при $x = \frac{9}{11}$, $x = 2$; min. при $x = -2$, $x = 1$.

121. Мах. при $x = -\frac{1}{3}$, $x = 2$; min. при $x = -2$, $x = 1$.

122. Min. при $x = -1$; мах. при $x = +1$.

123. Періодъ функціи π; въ промежуткѣ $0 \leqq x < \pi$ мах. при $x = \frac{\pi}{6}$, min. при $x = \frac{5\pi}{6}$.

124. Періодъ функціи 6π, въ промежуткѣ $0 \leqq x < 6\pi$: min. при $x = \frac{3\pi}{2}$, мах при $x = \frac{9\pi}{2}$

125. Періодъ функціи 12π; въ промежуткѣ $0 \leqq x < 12\pi$: max. при $x = 0$, $\frac{24\pi}{5}$, $\frac{36\pi}{5}$; min. при $x = \frac{12\pi}{5}$, 6π и $\frac{48\pi}{5}$.

126. Періодъ функціи π, въ промежуткѣ $0 \leqq x < \pi$: max. при $x = \frac{\pi - a}{2}$, min. при $x = \pi - \frac{a}{2}$.

127. Max. при $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, min. при $x = \pm 1$ $y = 0$.

128. Max. при $x = \frac{(4k+1)\pi}{2}$, min. при $x = \frac{4k+3}{2}\pi$.

129. Max. $\frac{a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 + b^4}}{2}$, min $\frac{a^2 + b^2 - \sqrt{a^4 + b^4}}{2}$.

130. $2x^3 - 9x^2 + 12x + 23$

131. 1-й случай: при $x = \frac{\pi}{2}$ min., при $x = \arccos\sqrt{2 - \frac{1}{e^2}}$ max

2-й случай: при $x = \frac{\pi}{2}$ max.

132. Max. при $x = a$, min. при $x = -a$.

133. Min. при $x = \frac{1}{2}$: $y = 2$.

134. При $x = 1$, $y_{max} = 0$, при $x = \frac{1}{2}$, $y_{min} = -\frac{1}{2}$.

135. При $x = 1$ значеніе $y = 1$ будетъ maximum и вмѣстѣ съ тѣмъ наибольшее значеніе. Наименьшаго значенія функція не имѣетъ.

136. Функція не имѣетъ ни maxima, ни minima, такъ какъ производная сохраняетъ постоянное значеніе.

137. Функція не имѣетъ ни maxima, ни minima, такъ какъ въ промежуткѣ возможнаго заданія функціи производная не обращается въ нуль.

138. Кривая симметрична относительно оси OY, въ началѣ координатъ касательная совпадаетъ съ осью OX; при $x > 0$, y возрастаетъ.

139. Ломаная, состоящая изъ биссекторовъ 1-го и 2-го координатныхъ угловъ.

140. Max y при $x = \frac{3}{5}$, min. y при $x = 1$.

141. Max. y при $x = 1$, min. y при $x = \frac{5}{3}$.

142. Max. y при $x = 0$; min. y при $x = -1$ и $x = +2$.

143. Функція постоянно убываетъ, разрывъ непрерывности при $x = -4$

144. Min. y при $x = 0$; разрывъ непрерывности при $x = 1$, $\lim\limits_{x=\pm\infty} y = 1$.

145. Функція убываетъ при $0 < x < 1$, возрастаетъ при $x < 0$ и при $x > 1$. Разрывъ непрерывности при $x = 0$ и $x = 1$.

146. Функція постоянно убываетъ. Разрывъ непрерывности при $x = 0$; $x = 1$, $x = -1$

147. Min. y при $x = 0$; разрывъ непрерывности при $x = 1$.

146. I. Если $2b^2 > a^2$, то функція имѣетъ max. при $x = 0$.

II. Если $2b^2 < a^2$, то max. y при $x = 0$, min y при $x = -\sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{a^2 - 2b^2}}$.

146 Функція убываетъ въ промежуткѣ $(-\infty, 0)$ и возрастаетъ въ промежуткѣ $(0, +\infty)$.

150. Функція возрастаетъ отъ -1 до $+1$, не имѣя ни max., ни min.

151. Max. y при $x = -\frac{3}{2}$ и $x = +3$; min. y при $x = +1$, $\lim\limits_{x=\pm\infty} y = 0$.

152. Max. y при $x = 0$; min. y при $x = -1$ и $x = +1$, $\lim\limits_{x=\pm\infty} y = 1$.

153. Min. y при $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; $\lim\limits_{x=\pm\infty} y = 0$; при $x = -1$ произв. не существуетъ.

154. Функція постоянно возрастаетъ, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$.

155. Max. y при $x = \pm 1$. min y при $x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$.

156. Max. y при $x = \frac{26}{27}$, min. y при $x = 1$.

159. Max. y при $x = 0$; min. y при $x = \pm 1$.

190. Max. y при $x = +1$, min. y при $x = -1$; $\lim\limits_{x = \pm\infty} y = 0$.

161, Max. y при $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, min. y при $x = 0$; $\lim\limits_{x = \pm\infty} y = 0$; при $x = \pm 1$ производная не существуетъ.

162. Min. y при $x = 0$; $\lim\limits_{x = \pm\infty} y = 0$.

163. Область измѣненія x: $x^2 \geq 1$, max. y при $x = +1$, $\lim\limits_{x = \pm\infty} y = 0$.

164. Область измѣненія x: $0 < x \leq 1$ Функція $y = \sqrt{\frac{1 - x}{x}}$ постоянно убываетъ. Разрывъ непрерывности при $x = 0$

165. Область измѣненія x $x >$ 1. Функція $y = \frac{x}{\sqrt{x + 1}}$ постоянно возрастаетъ. Разрывъ непрерывности при $x =$ 1.

166. Область измѣненія x: $-1 < x < +1$. Функція $y = +\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ постоянно возрастаетъ, разрывъ непрерывности при $x = +1$.

167. Функція постоянно возрастаетъ, разрывъ непрерывности при $x = -1$.

168. Функція $y = +\frac{\sqrt{x}}{x - 1}$ убываетъ при $x \geq 0$ и терпитъ разрывъ непрерывности при $x = 1$.

169. Область измѣненія x: $-1 < x < +1$. Функція $y = \frac{(1 + x)\sqrt{1 - x^2}}{x}$ постоянно убываетъ, разрывъ непрерывности при $x = 0$.

170. Функція постоянно возрастаетъ; при $x = 0$ разрывъ непрерывности.

171. Область измѣненія x: $x \leq 1$. Функція $y = \frac{x\sqrt{1 - x}}{1 + x}$ имѣетъ min. при $x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$, max. при $x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$.

172 Производныя обоихъ логариѳмовъ по абсолют величинѣ равны $\frac{1}{\sqrt{2 + 2\sin x}}$ и различаются лишь знакомъ.

173. Періодъ функціи π, max. y при $x = \frac{7\pi}{8}$; min. y при $x = \frac{3\pi}{8}$.

174. Функція имѣетъ періодъ 2π; maxima функціи соотвѣтствуютъ $x = 0$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$, 2π; minima соотвѣтствуютъ $x = \frac{\pi}{4}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

175. Функція имѣетъ періодъ $\frac{\pi}{2}$; maxima функціи соотвѣтствуютъ $x = 0$, $\frac{\pi}{2}$; minimum сотнѣтствуетъ $x = \frac{\pi}{4}$.

176. Функція имѣетъ періодъ $\frac{\pi}{2}$; max. y при $x = 0$, $\frac{\pi}{2}$; min. y при $x = \frac{\pi}{4}$.

177. Періодъ функціи 2π; min. y при $x = \frac{\pi}{10}$, $\frac{9\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{2}$; max y при $x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{13}{10}\pi$ и $\frac{17}{10}\pi$.

178. Періодъ функціи 2π; max. y при $x = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$; min. y при $x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

179. Періодъ функціи 2π; max. y при $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}$. min. y при $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

180. Періодъ 2π; max. y при $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; min. y при $x = 0, \pi, 2\pi$.

181. Періодъ 2π; max. y при $x = 0$; $x = 2\pi$; min. y при $x = \pi$ Разрывъ непрерывности при $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

182. Періодъ функціи π; max. y при $x = \frac{\pi}{2}$; min. y при $x = 0, \pi$. Разрывы непрерывности при $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

183. Періодъ функціи 2π; max. y при $x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, min y при $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$ Разрывъ непрерывности при $x = 0, \pi, 2\pi$.

184. Періодъ функціи 2π; max. y при $x = \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$, min. y при $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$. Разрывы непрерывности при $x = 0, \pi, 2\pi$.

185. 1. Если $tg\,\alpha > \frac{3}{4}$, то y возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$ при измѣненіи x отъ 0 до π. 2. Если $tg\,\alpha < \frac{3}{4}$, то y имѣетъ въ промежуткѣ $(0, \pi)$ одинъ max. и одинъ min.

186. Функція возрастаетъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до 0 и убываетъ отъ $+\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{\pi}{2}$ при измѣненіи x отъ 0 до $+\infty$ Точка $x = 0$, $y = +\frac{\pi}{2}$ угловая.

187 Max. y при $x = -\sqrt{3}$, min. y при $x = +\sqrt{3}$, $\lim\limits_{x=-\infty} y = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x=+\infty} y = +\frac{\pi}{2}$.

188. y min. при $x = -\frac{1}{2}$.

189. Точки перегиба соотвѣтствуютъ $x = k\pi$
» разрыва » $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ } k цѣлое число.

190. При измѣненіи x отъ 0 до $+\infty$ функція сначала возрастаетъ отъ $-\infty$ до $\frac{1}{ae}$, затѣмъ убываетъ и приближается къ предѣлу 0.

192 Область измѣненія x $x > 2$ или $x < 1$. Въ области $x < 1$ функція убываетъ; въ области $x > 2$ возрастаетъ.

197. Min. y при $x = 0$.

198. При увеличеніи x отъ 0 до ∞ функція убываетъ отъ $\frac{1}{6}$ до $\frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{9{,}86}$.

199. Max. y при $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, +\sqrt{\frac{2}{3}}$, min. y при $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}, +\sqrt{\frac{1}{3}}$. $\lim\limits_{x=\pm\infty} y = 0$.

200. Функція въ промежуткѣ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ возрастаетъ.

201. При измѣненіи x отъ 0 до $+\infty$ функція постоянно возрастаетъ отъ 1 до $e = 2{,}7182818\ldots$

202. Въ промежуткѣ $(-\infty, 0)$ функція возрастаетъ отъ $-\infty$ до 0. Въ промежуткѣ $(0, +\infty)$ max. y при $x = \cot\frac{\alpha}{2}$, min. y при $x = -tg\frac{\alpha}{2}$, $\lim\limits_{x=+0} y = +\infty$, $\lim\limits_{x=+\infty} y = 0$.

202. При $x < 0$ функція равна $2\arcsin x + \frac{\pi}{2}$.

204. 1. **205** 2.
206. $k < 11$. **207.** $k > 175$; $k < 6^{26}{,}_{27}$.
208. $k > 0$; $k < -4$. **209.** $0 < k < 38^{13}{}_{16}$.
210. При всѣхъ a два вещественныхъ корня.
211. При всѣхъ a два вещественныхъ корня.
212. Одинъ вещественный корень при $a < 1$, три — при $a = 1$.

213. $k = 72$; $k = \frac{800}{27}$ **214.** $k < 0$.

215. $k = -72 - 9\log 9$.

216. $k = \frac{\pi}{12} - \frac{2-\sqrt{3}}{2}$, $k = \frac{5\pi}{12} - \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

217. $k = -1$.
218. y_{max} при $x = 1$ и $x = 3$; y_{min} при $x = 2$
219. $2 < x < 3$.

220. При $a > \frac{1}{e}$ нѣтъ вещественныхъ корней; при $0 < a < \frac{1}{e}$ два корня; при $a < 0$ одинъ корень.

221. При $a > 0$ одинъ корень, при $0 > a > \frac{1}{e}$ два корня; при $a < -\frac{1}{e}$ нѣтъ корней.

222. Два вещественныхъ корня, одинъ положительный и одинъ отрицательный.

223. Основаніе системы логариѳмовъ должно быть $< e^{\frac{1}{e}}$.

236 Для ариѳметической. **237** $\frac{\pi k^3}{216}$.

238. $\frac{32\pi R^3}{81}$.

239. Высота цилиндра $= \frac{2R}{\sqrt{3}}$, гдѣ R радіусъ шара.

240. Линіи, соединяющія A и B съ соотвѣтствующими концами моста, должны быть параллельны.

241 Высота конуса равна $R\sqrt{3}$, гдѣ R радіусъ шара.

242. Сторона вырѣзаннаго квадрата $x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$.

243. Высота искомаго треугольника будетъ въ два раза меньше высоты даннаго треугольника ABC.

244. Стороны треугольника: $\frac{2a}{3}$, $\frac{2\sqrt{2pa}}{\sqrt{3}}$.

245. Обозначивъ уголъ между радіусами OA и OM черезъ α, получимъ: $tg\,\alpha = 2$.

246. Если площадь трапеціи S, то боковая сторона равна $\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$.

247. Радіусъ основанія конуса равенъ полуторному радіусу основанія цилиндра.

248. Центральный уголъ сектора долженъ быть равенъ $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

249. Если поверхность сосуда S, то радіусъ основанія цилиндра:

$$R = \sqrt{\frac{(2 + 3\sqrt{2})\,S}{14\pi}}$$

250. Высота цилиндрической части тѣла равна $\frac{\sqrt{13}-1}{6}R$ гдѣ R радіусъ шара.

251 $x_0 = \frac{l}{2} - \frac{d}{4}$, при условіи $0 < x < l - d$.

252. Если R радіусъ данной цилиндрической поверхности и H высота искомаго цилиндра, то $H = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

253. Если h высота цилиндра и a сторона куба, то $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

254. Если обозначить данный объемъ черезъ $\frac{4}{3}\pi a^3$, черезъ R радіусъ шара и черезъ h высоту сектора, то $R = a\sqrt[3]{10}$, $h = \frac{a}{5}\sqrt[3]{10}$.

255. Если a и b длина осей эллипса, то стороны прямоугольника равны

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \text{ и } \frac{b}{\sqrt{2}}$$

256. Если ACB путь точки, то $\frac{C\alpha}{CA} = \frac{v_1}{v_2}$, $\frac{C\beta}{CB}$.

257. Если ACB путь точки, то когда $\frac{\alpha B}{AB} \geq \frac{v_1}{v_2}$, $\frac{\alpha C}{AC} = \frac{v_1}{v_2}$;

когда $\frac{\alpha B}{AB} < \frac{v_1}{v_2}$, $\alpha C = \alpha B$.

258. Если α хорда сегмента и R радіусъ круга, то при условіи $\alpha \leq \frac{4R}{\sqrt{5}}$ прямоугольника наибольшаго периметра нѣтъ. Если же $\alpha > \frac{4R}{\sqrt{5}}$ то сторона искомаго прямоугольника, параллельная хордѣ сегмента, равна $\frac{4R}{\sqrt{5}}$.

259 Если центральный уголъ сектора α, то задача имѣетъ рѣшеніе лишь при условіи: $tg\frac{\alpha}{2} > 1$ Центральный уголъ x между радіусами, проведенными черезъ вершины прямоугольника, лежащія на дугѣ сектора, опредѣляется уравненіемъ $tg\frac{x}{2} = 2\ cotg\frac{\alpha}{2}$

260. Высота призмы равна $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, гдѣ R радіусъ шара.

261. Если уголъ между хордой AB и радіусомъ, проведеннымъ въ точку A, обозначить черезъ α, то углы, составляемые съ AB искомыми хордами опредѣляются уравненіемъ: $tg\,2x = \frac{2\sin 2\alpha}{1 + 2\cos 2\alpha}$.

262. Если R радіусъ сферы и d разстояніе ея центра до плоскости, то высота h конуса равна: $h = 2d + \sqrt{d^2 + 3R^2}$.

263. Если черезъ t обозначить промежутокъ времени отъ начала движенія до искомаго момента и черезъ α уголъ между OA и OA', то $t = \frac{vl + v'l' - (vl' + v'l)\cos\alpha}{v^2 + v'^2 - 2vv'\cos\alpha}$.

264. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

265 Искомая масса $= \sqrt{Mm}$; наибольшая скорость шара C равна $\frac{4MV}{(\sqrt{M} + \sqrt{m})^2}$.

266. Длина рычага l равна $\sqrt{\frac{2aP}{k}}$

267. Если вмѣстимость цилиндра v и внутренній радіусъ основанія R, то

$$R = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}.$$

268. Если внутренній радіусъ цилиндра R и вмѣстимость всего сосуда v, то

$$R = \sqrt[3]{\frac{3v}{2\pi}}.$$

269. Котелъ долженъ имѣть форму шара радіуса $R = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$

270. Высота конуса равна $4R$, гдѣ R радіусъ шара.

271. Задача не имѣетъ рѣшенія, если $l = 4R$. Если же $l < 4R$ и φ уголъ, образуемый стержнемъ съ горизонтомъ, то $\cos\varphi = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128R^2}}{16R}$.

272. Уголъ x, составляемый стержнемъ съ горизонтомъ, опредѣляется изъ равенства $tg\, x = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{2 \sin\alpha \sin\beta}$.

273. $x = \frac{1}{2} R$, гдѣ R радіусъ основанія конуса.

274. Искомый эллипсъ долженъ касаться круга основанія конуса. Если φ уголъ при вершинѣ конуса и x уголъ наклоненія плоскости искомаго эллипса къ основанію конуса, то $\sin 2x = 2 \sin\varphi$.

275. Искомая нормаль составляетъ съ осью параболы уголъ 45°.

276. Линія, соединяющая P съ центромъ круга, дѣлитъ пополамъ уголъ между искомыми хордами.

277. Плоскость должна пересѣкать ребра пирамиды пополамъ.

278. $\frac{k^2(3 - 2\sqrt{2})}{8}$.

279. Прямоугольникъ долженъ быть квадратомъ.

280. Отрѣзокъ искомой прямой между сторонами угла дѣлится въ точкѣ A пополамъ.

281. Если координаты точки A относительно осей OM и ON равны соотвѣтственно a и b, то отрѣзокъ $OM = a + \sqrt{ab}$.

282. Если обозначить черезъ a и b разстоянія точки A до прямыхъ ON и OM и черезъ φ уголъ, составляемый искомой прямой съ прямой OM, то

$$tg\,\varphi = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

283. Равнобедренный.

284. Разстояніе искомой прямой отъ A равно $\frac{3}{2}$ радіуса круга.

285. Источникъ свѣта долженъ находиться въ точкѣ пересѣченія прямой OA и окружности, проходящей черезъ B и имѣющей центръ на OB, на разстояніи $\frac{3}{4} a$ отъ точки B.

286. Отношеніе разстояній искомой точки до центровъ 1-ой и 2-ой сферы равно $\left(\frac{R}{R'}\right)^{3/2}$.

287. Касательную надо провести перпендикулярно къ биссектрисѣ даннаго угла.

288. Точка C должна совпадать съ центромъ полуокружности.

289. min. при $x = -\frac{4}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

290. Наименьшее значеніе функціи достигается при $x = y = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

291. Наим. значеніе $= 0$; наибольшее $= a^3 + 27$, если $a \leqq 9$ и $2a^3 - 9a^2 + 27$, если $a > 9$.

292. Наим. значеніе $= -8$, наибольшее $= 2a^4$.

293. Наибольшее значеніе достигается. 1) при $x = \pm 1$, $y = 0$, когда $a > b$; 2) при $x = 0$, $y = \pm 1$, когда $a < b$; 3) при $x^2 + y^2 = 1$, когда $a = b$.

294. Наибольшее значеніе $= +1$, наименьшее $= -\frac{1}{8}$.

296. z max при $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{2}$. Ось OY на поверхности и точки на ней выше и ниже близъ лежащихъ, смотря по тому будетъ ли $y(a - y) < 0$ или $y(a - y) > 0$.

297. Гребни въ плоскостяхъ $x - y = 2k\pi$ при $ab > 0$ соотв. max.
» » » $x - y = (2k+1)\pi$ при $ab < 0$ соотв. min.

297. $f_{min} = 3$.

298. Доказываемъ предложенное свойство, разсматривая m.n. функціи $u = \frac{x^p + y^p + \ldots + t^p}{k}$ при условіи $x + y + \ldots + t = 1$.

299. Наибольшее значеніе достигается при $x_1 = bq^n$, $x_2 = bq^{n-1}$, $\ldots x_n = bq$, $n+1$ где $q = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

300. При $x = -2$, $y = 0$, $z_{min} = +1$; при $x = \frac{16}{7}$, $y = 0$, $z_{max} = -\frac{8}{7}$.

301. При $x = 1$, $y = 1$ $z_{max} = 4$, при $x = -1$, $y = -1$, $z_{min} = -4$.

302. Искомое наименьшее значеніе $f = \frac{1}{p}(\sqrt{\alpha_1\beta_1} + \sqrt{\alpha_2\beta_2} + \ldots + \sqrt{\alpha_n\beta_n})^2$.

303 Наименьшее значеніе $= \frac{12 - \sqrt{18}}{7}$, наибольшее $\frac{12 + \sqrt{18}}{7}$

304. Искомыя наибольшее и наименьшее значенія служатъ корнями уравненія $\frac{l^2}{u - a^2} + \frac{m^2}{u - b^2} + \frac{n^2}{u - c^2} = 0$.

305. Наибольшее значеніе $= 4^4$ и, наименьшее равно 4.

306. Наибольшее значеніе функціи достигается при $x = \frac{\pi}{3}$; $y = \frac{\pi}{6}$.

307. Наибольшее значеніе $= \frac{1}{8}$; наименьшее $= 0$.

309. Высотъ сегмента параболы должна быть равна $\frac{3}{4}$ высоты треугольника

310. $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$, $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$, гдѣ x_i, y_i координаты вершинъ.

311. Равнобедренный.

312. Длина искомой прямой $l = \sin\frac{\theta}{2}\sqrt{2ab}$, гдѣ a и b стороны треугольника а θ уголъ между ними.

314 Искомый четыреугольникъ можетъ быть вписанъ въ кругъ.

315 Искомая прямая $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, если a и b координаты заданной точки.

316. Если a, b, c стороны треугольника и S его площадь, то разстоянія искомой точки x, y, z до сторонъ a, b, c будутъ.

$$x = \frac{2Sa}{a^2 + b^2 + c^2},\ y = \frac{2Sb}{a^2 + b^2 + c^2},\ z = \frac{2Sc}{a^2 + b^2 + c^2}$$

317. Наибольшее значеніе площади $= \frac{l^2}{4}\cot g\frac{\theta}{2}$

318. $ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2$, гдѣ a, b и c координаты данной точки.

319. $V_{max} = a^3$

320. Кубъ съ ребромъ $\sqrt{\frac{S}{6}}$, гдѣ S полная поверхность параллелепипеда.

321. Искомый эллипсоидъ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3$.

322 Искомая плоскость: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$

323. Если x, y, z наружные размѣры ящика, то $x = y = z = \sqrt[3]{v} + 2a$

324. Стороны искомаго треугольника равны $\frac{3}{4}p$, $\frac{3}{4}p$ и $\frac{1}{2}p$, гдѣ $2p$ данный периметръ

325. Двугранные углы при основаніи должны быть одинаковы.

326. $V_{max} = \frac{4}{27}\pi R^2 H$, гдѣ R—радіусъ основанія, H—высота даннаго конуса.

327. $V_{max.} = \frac{8}{27} R^2 H$, гдѣ R—радіусъ основанія, H—высота конуса.

328. $S_{max.} = a^2$.

329. Радіусъ основанія $r = l\sqrt{\frac{2}{3}}$, гдѣ l—длина образующей.

330. Радіусъ основанія конуса $R = \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$

331. Радіусы основаній конуса

$$R = (1 + \cos\alpha)\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi\sin\alpha\,(3 + \cos^2\alpha)}}; \qquad r = (1 - \cos\alpha)\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi\sin\alpha\,(3 + \cos^2\alpha)}}.$$

332. $x = y = z = \frac{\pi}{3}$

333. Искомый треугольникъ правильный.

334. Искомый многоугольникъ правильный.

335. Искомый многоугольникъ правильный, съ площадью $\frac{1}{2} R^2 n \sin\frac{2\pi}{n}$

336. Площадь искомаго четыреугольника $2R^2\sin\alpha$

337. Нормаль къ эллипсу въ искомой точкѣ перпендикулярна къ линіи, соединяющей данныя точки.

338. Искомое разстояніе равно $p\sqrt{5}$.

339. Наибольшая площадь $S = \frac{ab\sqrt{3}}{4}$.

340. Искомая точка имѣетъ абсциссу $x = \frac{a^2 m}{a^2 - b^2}$, при условіи $|m| < \frac{a^2 - b^2}{a}$.

Если же $|m| \geqq \frac{a^2 - b^2}{a}$, то для искомой точки $x = \pm a \begin{cases} +, & \text{если } m > 0 \\ -, & \text{если } m < 0 \end{cases}$

341. Искомая площадь $S = 3\sqrt{3}\,ab$.

342. Нормаль должна быть проведена черезъ точку съ координатами:

$$x = +\sqrt{\frac{a^3}{a + b}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{b^3}{a + b}}.$$

343. 1. Если $a^2 > 2b^2$, то нормаль должна проходить черезъ точку съ координатами $x = \pm\frac{a^2}{c}\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2}}$; $y = \pm\frac{b^2}{c}\sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$, гдѣ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. 2. Если $a^2 \leqq 2b^2$, то искомая нормаль совпадаетъ съ малой осью эллипса.

344. Искомая сумма $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$, гдѣ a и b полуоси.

345. $S_{max.} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4ab}$

346. $bx \pm ay = \pm\sqrt{2}\,ab$—искомая касательная къ эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

347. Касательная должна быть проведена въ точкахъ съ координатами $x = \pm\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a + b}}$; $y = \pm\frac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{a + b}}$.

348. $\sqrt{6 + \sqrt{12}}$; $\sqrt{6 - \sqrt{12}}$.

349. $S = \frac{\pi abc}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}}$

350. $\frac{x}{a^{2/3}} + \frac{y}{b^{2/3}} + \frac{z}{c^{2/3}} = \sqrt{a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3}}$.

351. $V_{max} = a^2\sqrt{pq}$, гдѣ a—длина сегмента параболоида $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$.

352. Въ 1-мъ углѣ искомая плоскость $\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} + \frac{z}{\sqrt{c}} = \sqrt{a + b + c}$.

353. Плоскость $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3}$, касательная къ эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, образуетъ тетраэдръ съ наименьшимъ объемомъ $V = \frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

ОТДѢЛЪ V.

---

1. Астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$.

2. Если обозначить черезъ l длину отрѣзковъ $DM = DN$, черезъ a радіусъ круга и за полярную ось взять діаметръ, проходящій черезъ A, то уравненіе кривой будетъ: $(\rho - 2a \cos \theta)^2 = l^2$.

3. Лемниската.

4. Двѣ улитки Паскаля.

5. Лемниската.

6. Циссоида.

7. Искомое условіе. $t_1 t_2 t_3 = -1$.

8. 1. $t_1 t_2 t_3 (t_1 + t_2 + t_3) + (t_1 + t_2 + t_3)^2 - t_1 t_2 - t_1 t_3 - t_2 t_3 + 3 = 0$;
2. $(3t^2 - 1) x + t (t^2 - 3) y + 4a = 0$.

9. $t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = -1$.

10. $t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 + t_1 + t_2 + t_3 = 0$.

11. $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$.

12. $y = x$.

13. $17x + 9y - 25 = 0$.

14. $x - y + 4$.

15. $y - x + 1 = 0$.

17. Для точки эллипса, лежащей въ первомъ координатномъ углѣ, уравненіе касательной: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \sqrt{2}$.

19. $T = a$.

23. $T + S_t = \frac{1}{a} xy$.

26. Искомые углы опредѣляются изъ уравненій. $tg\, \mu = 2k\pi$ или $tg\, \mu = (2k+1)\pi$, гдѣ k произвольное цѣлое число.

30. $\mu = \frac{\pi}{2} + n\vartheta$

32. $T = \frac{2\rho^3}{a^2}$, $N = \frac{a^2}{2\rho}$.

36. Улитка Паскаля.

37. Уравненіе кривой $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$. Шесть вершинъ съ касательными $\parallel OX$ при $a^2 > 2b^2$, и только двѣ при $a^2 \leqq 2b^2$. Двѣ вершины съ касательными $\parallel OY$

38. Лемниската.

39. Циссоида $y^2 = \frac{(x-a)^3}{2a - x}$

40. Спираль Архимеда $\rho = Rt$.

41. $(ax)^{\frac{n}{n}-1} \pm (by)^{\frac{n}{n}-1} = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{n}-1}$.

42. $\rho^{n+1} = a^{n+1} \cos \frac{n}{n+1} \vartheta$.

43. Уравненіе кривой $2(x^2 + y^2)^3 = a^2 (x^2 - y^2)^2$ Четырехлепестникъ.

44. Парабола $x^2 - ay + a^2 = 0$.

45. Удлиненная циклоида.

46. Окружность круга.

48. $3x - 5y - 9 = 0$.

51. $x + y = \frac{3}{2} p$.

52. Для точки, лежащей въ первомъ координатномъ углѣ, уравненіе нормали: $ax - by = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{2}}$.

53. $\sqrt{a} \cdot x - \sqrt{b} \cdot y = (a - b) \sqrt{a + b}$.

54. Черезъ начало координатъ.

59. Парабола $4y^2 - 2px + 3p^2 = 0$.

60. Искомыя координаты. $x_c = 2$, $y_c = 2$.

61. $R = \sqrt{\frac{(2a + 3x)^3 x}{3a^2}}$

62. $\frac{\sqrt{13}}{6}$.

63. $R = \dfrac{a}{\cos\dfrac{x}{a}}$, $\quad x_c = x - a\,tg\,\dfrac{x}{a}$, $\quad y_c = a\,lg\cos\dfrac{x}{a}$ $\quad a = y = a$.

64. $R = \dfrac{a^2}{3r}$. **65** $R = p\left(1 + \dfrac{p^2}{a^2}\right)^{3/2}$.

66. $x_c = \dfrac{a}{3}(2\cos\varphi + \cos 2\varphi)$, $\quad y_c = \dfrac{a}{3}(2\sin\varphi + \sin 2\varphi)$, $\rho = \dfrac{8}{3}\,a\sin\dfrac{\varphi}{2}$.

67. $R = N = \dfrac{y^2}{a}$. **69.** $R = \dfrac{1}{e}$, $x_c = \dfrac{1}{e}$, $y_c = 0$.

70 $R_{min} = a$ для точки M (0,0). **71** Радіусъ кривизны $R = \dfrac{(a^2 + b^2)^{3/2}}{2\sqrt{2}\,a}$.

72. $R = \sqrt{ab}$ **73.** $x = 0$, $y = 0$; c (кривизна) $= \dfrac{2}{a}$.

74. $x = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$, $y = \dfrac{1}{2}\,log\,2$.

78. $R = \dfrac{1}{p^2}N^3$, гдѣ p параметръ кривой $y^2 = 2px + qx^2$.

81. Задавая эллипсъ параметрически, находимъ, что M, M' и M'' соотвѣтствуютъ значеніямъ параметра φ, $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, $\varphi = \dfrac{4\pi}{3}$.

82. Уравненіе параболы $y = \sqrt{2r(a+r)}\left\{\dfrac{x}{a+r} - 1 + \sqrt{1 - \dfrac{x}{a+r}}\right\}$.

83. Для эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста:
$\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^3 = \left(\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2$.

84. Кругъ радіуса a. **85.** Кардіоида.

86. Астроида $(x + y)^{2/3} + (x - y)^{2/3} = 2$.

87. $x = a\,log\dfrac{y \pm \sqrt{y^2 - 4a^2}}{2a} \mp \dfrac{y\sqrt{y^2 - 4a^2}}{4a}$.

88. $\left(\dfrac{3y}{8}\right)^4 + 6a^2\left(\dfrac{3y}{8}\right)^2 + 3a^3x = 0$.

89. $(qx + p)^{2/3} - qy^{2/3} = \dfrac{(1 + q)^{2/3}}{p^{4/3}}[(qx + p)^2 - qy^2]$, если кривая 2-го порядка задана уравненіемъ $y^2 = 2px + qx^2$.

90. $(x^{2/3} + y^{2/3})^3(x^{2/3} - y^{2/3}) = \dfrac{4}{9}a^2$. **91.** Цѣпная линія $y = \dfrac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$.

92. $X^{2/3} + Y^{2/3} = (2a)^{2/3}$.

93. Если уравненіе параболы $y^2 = 2px$, то иск. длина $p(3\sqrt{3} - 1)$.

94. Заданная парабола: $y^2 = 2px$

95. Гипербола $xy = m^2\,cosec\,\omega$, для которой стороны заданнаго угла служатъ асимптотами.

96. Эллипсъ съ полуосями r и $r\sqrt{2}$, если за ось абциссъ взять діаметръ круга, параллельный заданному направленію.

97. Эллипсъ съ осями $\dfrac{a}{2}\sqrt{2}$ и $\dfrac{b}{2}\sqrt{2}$.

98. Парабола: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, гдѣ a заданная сумма отрѣзковъ.

99. Эллипсъ или парабола. **100.** Циклоида.

101. Парабола $y\sin\alpha = 2\sqrt{ax} - (x + a)\cos\alpha$, гдѣ a — разстояніе заданной точки отъ заданной прямой и α — данный уголъ; за ось ординатъ взята данная прямая, ось абциссъ проходитъ черезъ данную точку.

102. Окружность $(y + x + d)^2 + (y - x + d)^2 = a^2$, гдѣ a сторона квадрата, $2d$ — разстояніе между заданными точками.

103. Астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = d^{2/3}$. **104.** Парабола.

105 $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{x^2 + y^2 - R^2}{a} + a - x\right)^2$, гдѣ a абсцисса центра круга, радіуса R.

106. Если $y^2 - 2px + p^2$ уравненіе параболы, то огибающая будетъ (1) прямая $x + p = 0$; (2) окружность $2x^2 + 2y^2 - px - p^2 = 0$.

107. $a^2x^2 + b^2y^2 = \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2$.

108. Искомая огибающая: $x^3 + xy^2 + 4y^2 = 0$, гдѣ p — параметръ заданной параболы.

109. Парабола $y^2 + 8px = 0$.

110. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$.

111. Парабола $y^2 = 2p(p - x)$, если заданная парабола $y^2 = 2px$.

112. Кардіоида.

113. Циклоида.

114. Эпициклоида, радіусъ катящагося круга равенъ половинѣ радіуса неподвижнаго.

115. Эволюта гиперболы.

116. Парабола $y^2 + 6px = 0$, гдѣ p — параметръ заданной параболы.

117 Циссоида, $y^2 = \frac{7^3}{3^5} \cdot \frac{x^3}{2a - x}$.

118. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^2}$.

119 Прямыя $x + y + c = 0$.

120. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mn}{m+n}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = 1$.

121 Вогнута.

122 Выпуклость обращена къ оси OX.

123. Къ оси OY кривая обращена вогнутостью.

124. Кривая выпукла.

125. Вершины съ касательными: | OX при $x = -\frac{2}{k\pi}$,
» » » | OY » $y = 0$.

126. Точки съ абсциссами ± 1.

127. $x = 1$, $y = 3$ точка перегиба.

128. $M\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

129. M (1, 0) точка перегиба.

130. $M_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{4}\right)$ и $M_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{4}\right)$.

131. Точка перегиба $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

132 Точка перегиба (0,1).

133 M_1 (0, 1), M_2 (1, 1).

134. Точка перегиба при $\varphi = \pm \frac{\pi}{6}$

135 Точка перегиба $\left(\frac{3}{2}, e^{-2}\right)$.

136. Начало координатъ двойная точка.

137. Двойная точка $(a, -2a)$.

138. Начало координатъ тройная точка (возвратъ).

139 Начало координатъ тройная точка

140. Начало координатъ тройная точка (возвратъ)

141. Начало координатъ точка возврата.

142. Начало координатъ точка возврата II рода.

143 Начало координатъ изолированная точка.

144. M (a, 0) изолированная точка.

145. Начало координатъ изолированная точка.

146 Начало координатъ изолированная точка.

147. Начало координатъ угловая точка.

148. Начало координатъ угловая точка.

149. Начало координатъ точка прекращенія.

150. Начало координатъ точка прекращенія.

151. (0 0) и (0,1) точки прекращенія.

152. Кривая вся расположена по одну сторону асимптоты $y = x + \frac{2}{3}$

154. Асимптота $y = x + \frac{4}{3}$, обѣ вѣтви кривой съ одной стороны асимптоты.

155. Асимптота $y + x = 0$, кривая расположена по обѣ стороны асимптоты, пересѣкая ее въ началѣ координатъ.

156. Асимптота $y = x + \frac{a}{3}$.

157 Асимптоты $y = \pm\left(x - \frac{b}{2}\right)$.

158. Асимптоты $y = \pm(x + a)$, $x = a$.

159. Асимптоты $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

160. Асимптоты $x = \pm 2$, $y = \mp 2$. Вѣтви кривой приближаются къ концамъ асимптотъ съ разныхъ сторонъ.

161. Въ началѣ координатъ изолированная точка.

Вершины $\begin{cases} \text{съ касат. } \| OX : (0, \mp 2), \\ \text{съ касат. } \| OY : (\pm 1, 0); \left(\pm \sqrt{\frac{4}{3}}, \mp \sqrt{\frac{2}{3}}\right). \end{cases}$

162. Начало координатъ двойная точка.

Вершины $\begin{cases} \text{съ касат. } \| OX : (\pm \sqrt{\sqrt{7} - 1}; \pm \sqrt{7 - \sqrt{7}}), \\ \text{съ касат. } \| OY : (\pm \sqrt{6}, 0). \end{cases}$

163. Вершины съ касательными $OX : (\mp 2\sqrt{5}, 4)$; $(\sqrt{5}, -1)$.
» » » $OY : (\mp 5, 3)$.

Черезъ начало координатъ проходятъ двѣ вѣтви кривой (узелъ).

164. Въ началѣ координатъ двойная точка.

Вершины $\begin{cases} \text{съ касат. } \| OX : \left(\sqrt[8]{\frac{3}{16}}, \sqrt[8]{\frac{27}{16}}\right); \left(-\sqrt[8]{\frac{3}{16}}, \sqrt[8]{\frac{27}{16}}\right). \\ \text{съ касат. } \| OY : \left(\sqrt[8]{\frac{27}{16}}, \sqrt[8]{\frac{3}{16}}\right), \left(\sqrt[8]{\frac{27}{16}}, \sqrt[8]{\frac{3}{16}}\right). \end{cases}$

165. Вершины съ касательными $OX : \left(\frac{17}{8}, \pm \frac{7}{8}\sqrt{7}\right)$, $\left(\frac{10}{3}, \pm \sqrt{3}\right)$,
» » » $OY : (5, 0)$; $(7, 0)$; $\left(-\frac{1}{24}, \pm \frac{\sqrt{143}}{24}\right)$.

Черезъ начало координатъ проходятъ двѣ вѣтви (узелъ).

166. Кардоида. Вершины съ касательными. $\| OX : (3, \pm \sqrt{3})$.
» » » $\| OY : (0, 8)$, $(1, \mp \sqrt{3})$.

Въ началѣ координатъ возвратъ 1-го рода.

167. Вершины съ касательн $\| OX : \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \mp \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$; $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$,
» » » $\| OY : (\mp 1, 0)$.

Черезъ начало координатъ проходятъ двѣ вѣтви кривой.

168. Вершины съ касательными $\| OX : (\mp 6, 12)$,
» » » $\| OY : (\pm 6\sqrt{2}, 8)$.

Черезъ начало координатъ проходятъ двѣ вѣтви кривой.

169. Черезъ начало проходятъ двѣ вѣтви кривой. Вершины, гдѣ касат $\| OY$. $(4, 0)$ и $(-1, 0)$. Вершины, гдѣ касат. $\| OX : x = \frac{9 \pm \sqrt{209}}{8}$; $y = \pm \sqrt[4]{x^2\left(2 + \frac{3}{4}x\right)}$; $x = \frac{9 \pm \sqrt{209}}{8}$; $y = \mp \sqrt[4]{x^2\left(2 + \frac{3}{4}x\right)}$.

170. 4 вершины съ касательными $\| OX$; въ точкахъ $(\pm\sqrt{3}, 0)$, $(2, \pm\sqrt{2})$, касательныя $\| OY$. Въ началѣ координатъ двойная точка.

171. Вершины съ касательными $\| OX$ $(2\sqrt{3}, \pm 2\sqrt[4]{27})$,
« » » $\| OY$ $(4, \pm 4)$.

Начало координатъ тройная точка.

172. Три вершины съ касательными $\| OX$,
Четыре » » » $\| OY$.

Черезъ начало координатъ проходятъ три вѣтви кривой.

173. Вершины съ касательными $\| OX : (2\sqrt{7}, \pm 4)$, $(-2\sqrt{7}, \pm 4)$,
» » » $\| OY : (\pm 4, \pm 2\sqrt{7})$, $(-4, \pm 2\sqrt{7})$.

Черезъ начало координатъ проходятъ 4 вѣтви кривой

174. Вершины съ касательн $\| OX : (0, \pm\sqrt{2})$; $(0, -2\sqrt{2})$; $(2, \mp\sqrt{10})$; $(-2, \mp\sqrt{10})$,
» » » $\| OY : (3, \pm\sqrt{5})$; $(-3, \pm\sqrt{6})$.

Двѣ особенныхъ точки $(\pm 2, 0)$.

175. Вершины съ касат. $\| OX : (0; 0{,}6)$; $(0; 2{,}7)$, $(2, 1 \pm \sqrt{3})$; $(-2, 1 \pm \sqrt{3})$; вершины съ касат. $\| OY : (\pm 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}, 2)$; $\left(\sqrt{4 \pm \sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\sqrt{4 \pm \sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$.
Двѣ особенныхъ точки. $(\pm 2, 0)$.

176. Четыре точки возврата 1-го рода: $(\pm a, 0)$; $(0, \pm a)$. Вершины съ касательными $\parallel OX$. $\left(\pm\sqrt{\frac{4+\sqrt{124}}{27}}\,a,\ \pm\sqrt{\frac{35+2\sqrt{124}}{27}}\,a\right)$ Вершины съ касательными $\mid OY$: $\left(\pm\sqrt{\frac{35+2\sqrt{124}}{27}}\,a,\ \pm\sqrt{\frac{4+\sqrt{124}}{27}}\,a\right)$.

177 Вершины съ касательными $\parallel OX$: $\left(\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$,
» » » $\mid OY$: $(0, 0)$.

Черезъ особенную точку $(1, 0)$ проходятъ двѣ вѣтви кривой (параболическія).

178. Вершины съ касательными $\mid OX$: $(-4a, \pm 16a)$;
» » » $\mid OY$: $(0, 5a)$.

Черезъ начало координатъ проходятъ двѣ вѣтви кривой. Есть параболическія вѣтви.

179. Вершины съ касательными $\mid OX$: $\left(-\frac{48}{25},\ \frac{32}{25}\left(\frac{6}{5}\right)^3\right)$,
» » » $\mid OY$ $(-2, 2)$

Начало координатъ двойная точка. Двѣ параболическія вѣтви

180. Вершины съ касательными OX: $(243, 6561)$,
» » » OY: $(250, 6250)$.

Черезъ начало координатъ проходятъ три вѣтви кривой Есть параболическія вѣтви.

181. Вершины съ касательными $\mid OX$: $(9, 81)$;
» » » $\mid OY$: $(6\sqrt[3]{4}, -72)$.

Черезъ начало координатъ проходятъ три вѣтви кривой; есть параболическія вѣтви.

182. Вершины съ касательными $\mid OX$: $\left(2\sqrt[7]{\frac{8}{3}},\ 4\sqrt[7]{\frac{9}{64}}\right)$;
» » » $\mid OY$: $\left(8\sqrt[7]{\frac{2}{3025}},\ 4\sqrt[7]{\frac{32}{625}}\right)$.

Черезъ начало координатъ проходятъ три вѣтви кривой. Есть параболическія вѣтви.

283. Вершины съ касательными $\mid OX$: $(\pm 2, 2)$;
» » » $\mid OY$ $\left(\pm\frac{8}{9}\sqrt{6},\ \frac{16}{9}\right)$.

Начало координатъ тройная точка. Двѣ параболическія вѣтви.

184. Вершины съ касательными OX: $(15, \pm 15\sqrt{5})$;
» » » $\mid OX$: $(-16, \pm 32)$, $(0, 240)$.

Начало координатъ тройная точка. Кривая имѣетъ нѣсколько параболич. вѣтвей.

185. Вершины съ касательными $\mid OX$: $(-23-\sqrt{17},\ \pm\sqrt{102\sqrt{17}-214})$,
» » » OY: $(-32, 0)$

Начало координатъ тройная точка.

186. Вершина съ касательной $\mid OX$: $\left(0, \frac{a}{\sqrt[3]{4}}\right)$. Двѣ особенныхъ точки $(\pm a, 0)$ возвраты 2-го рода. Двѣ параболическихъ вѣтви

187. Въ началѣ координатъ перегибъ. Вершинъ нѣтъ. Асимптота: $y - x = 0$.

188. Въ началѣ координатъ перегибъ.

Вершины съ касат. $\mid OX$: $x = \pm\sqrt{\frac{29+13\sqrt{5}}{8}}$, $y = -\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$.

Асимптота: $x + y = 0$.

189. Вершины, гдѣ касат. $\mid OY$: $(0, 0)$ и $(\sqrt[3]{2}, 0)$. Асимптоты: $x - y = 0$; $x + y = 0$.

190. Вершины
$$\begin{cases} \text{съ касат. } \parallel OX: \left(\frac{1}{\sqrt[3]{32}},\ -\frac{3}{\sqrt[3]{32}}\right); \\ \text{съ касат. } \parallel OY: \left(-\frac{3}{\sqrt[3]{32}},\ \frac{1}{\sqrt[3]{32}}\right). \end{cases}$$

Асимптоты: $x + y = 0$; $x = y = 0$.

191. Вершины съ касат. $\parallel OX$. $(0, 0)$ и $(-\sqrt[3]{2}, -2\sqrt[3]{2})$.
» » » $\parallel OY$ $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$.

Асимптоты: $x = 0$ и $x - y = 0$.

192. Вершины $\begin{cases} \text{съ касат. } \parallel OX : \left(-2, -\frac{1}{2}\right). \\ \text{» » } OY : (1, 1) \end{cases}$

Асимптоты: $x = 0$, $y = 0$.

193 Вершина съ касат $\parallel OX : x = \sqrt[5]{\frac{9}{8}}$; $y = \frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{9}{8}}$

» » » $\parallel OY : x = -\frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{9}{8}}$; $y = -\sqrt[5]{\frac{9}{8}}$.

Асимптоты: $x = 0$, $y = 0$.

194. Вершины съ касат $\parallel OY$. $(0, 0)$; $(-\sqrt[3]{2}, 0)$, $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{13}}, \pm\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{13}}\right)$.

Вершинъ » » $\parallel OX$ нѣтъ.

Асимптоты: $y = -x\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$

195. Въ началѣ координатъ перегибъ. Асимптоты $x = 0$, $y = 0$; $x - y = 0$.
Вершины $\begin{cases} \text{съ касат. } \parallel OX : x = +1;\ y = 1 \pm \sqrt{2};\ x = -1,\ y = -1 \pm \sqrt{2}. \\ \text{» » } \parallel OY \text{ нѣтъ.} \end{cases}$

196. Асимптоты $x = 0$; $y = 0$. Вершина съ касат. $\parallel OX : x = 0$; $y = 1$.

197. Вершины съ касательными $\parallel OX$. $(8, \pm 8\sqrt{3})$.
» » » $\parallel OY$: $(4, 0)$.

Асимптоты: $x = 0$ и $2x \pm 2y \sqrt{3} = 0$.

198. Вершины съ касательными $\parallel OX$ $(1, 3)$; $(-1, -3)$;
» » » $\parallel OY$. $(3, 1)$; $(-3, -1)$;

Асимптоты: $y = x$; $y = 0$, $x = 0$. Четыре параболическихъ вѣтви.

199. Вершины $\begin{cases} \text{съ касат. } \parallel OX : \left(\frac{1}{\sqrt[8]{12}}, \frac{\sqrt[8]{3}}{\sqrt[8]{12}}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt[8]{12}}, -\frac{\sqrt[8]{3}}{\sqrt[8]{12}}\right). \\ \text{» » } OY : \left(-\frac{\sqrt[8]{3}}{\sqrt[8]{12}}, \frac{1}{\sqrt[8]{12}}\right); \left(+\frac{\sqrt[8]{3}}{\sqrt[8]{12}}, -\frac{1}{\sqrt[8]{12}}\right). \end{cases}$

Асимптоты: $x = 0$; $y = 0$; $x - y = 0$; $x + y = 0$.

200. Вершинъ нѣтъ.
Въ началѣ координатъ возвратъ 2-го рода
Асимптота $x = a$. (Циссоида Діоклеса).

261. Въ началѣ координатъ возвратъ 1-го рода. Вершина съ касат. $\parallel OX : x = 2$; $y = \sqrt[3]{4}$

Въ точкѣ $x = 3$, $y = 0$ перегибъ съ касат. $\parallel OY$. Асимптота $x + y - 1 = 0$.

202. Вершины, гдѣ касательныя $\parallel OX$ $\left(-\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1), \pm\frac{a}{2}\sqrt{14\sqrt{5} - 26}\right)$.

Вершины, гдѣ касательныя $\parallel OY$ $(a, 0)$.
Въ началѣ координатъ двойная точка (узелъ). (Прямая строфоида).
Асимптота $x = a$.

203. Начало координатъ изолированная точка. Вершинъ нѣтъ. Асимптоты: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

204. Вершинъ нѣтъ. Асимптоты: $x = \pm 2$. Начало координатъ двойная точка. (Каппа).

205. Въ началѣ двойная точка съ различными касательными. Асимптоты: $x + y = 1$, $x + y = -1$.

200. Въ началѣ координатъ двойная точка. Вершинъ нѣтъ. Асимптоты: $x - y = 0$; $x + y = 0$. Пять точекъ перегиба.

207. Черезъ начало координатъ проходятъ двѣ вѣтви кривой. Вершинъ нѣтъ. Асимптоты $x - y = 0$ и $x + y = 0$.

208. Асимптоты: $x = \pm 2$. Начало координатъ двойная точка.
Двѣ вершины съ касательными $\parallel OX$
Двѣ вершины съ касательными $\parallel OY$.

209. Вершины съ касательными $\parallel OX$: $(0, \pm 2\sqrt{2})$
Вершины съ касательными $\parallel OY$: $(\pm 1, \pm 2)$.
Особенная точка $(0, 1)$—узелъ, черезъ который проходятъ 2 вѣтви.
Асимптота: $y = 0$ (Конхоида Никомеда).

210. Начало координатъ—возвратъ 2 рода.

Асимптоты $x = 1$, $y = x\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Одна вершина съ касательными $\parallel OX$, одна съ касательными $\parallel OY$. Три точки перегиба

211. Вершины съ касательными $\parallel OY$ $(\pm 2, 0)$. Асимптоты $x = \pm 1$, $x = \pm y$. Начало координатъ двойная точка (узелъ).

212. Вершины съ касательными $\parallel OY$ $\left(\frac{3}{2}, \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$. Въ началѣ координатъ возвратъ 1-го рода. Асимптоты: $x = 1$, $2x \pm 2y + 1 = 0$.

213. Вершины съ касательными $\parallel OX$ $(0, \pm 2\sqrt{6})$,
» » » OY. $(3, \pm 2\sqrt{3})$, $(-3, \pm 2\sqrt{3})$; $(4, \pm 2\sqrt{3})$, $(-4, \pm 2\sqrt{3})$; $(\pm 5, 0)$.
Асимптоты. $y = \pm x$. Въ началѣ координатъ двойная точка (узелъ)

214. Въ началѣ координатъ двойная точка. Вершина съ касат. OY $\left(\frac{5}{4}, \frac{10}{3}\right)$
Асимптоты $y = 2$; $x = +1$, $x = 1$.

215. Въ началѣ координатъ двойная точка Вершины съ касательными $\parallel OX$: $(8, 8 \pm \sqrt{48})$. Асимптоты $x - 4 = 0$; $y + 1 = 0$; $x + y + 3 = 0$.

216. Вершинъ нѣтъ. Черезъ начало координатъ проходятъ двѣ вѣтви кривой (узелъ). Асимптоты: $x = -1$, $x = -2$, $y = -1$.

217 Вершинъ нѣтъ Въ началѣ координатъ особенная точка, черезъ которую проходятъ три вѣтви кривой. Асимптоты: $y + 1 = \pm x$ (Скифоида)

218. Черезъ начало координатъ проходятъ три вѣтви кривой Асимптота $x + y\sqrt[5]{3} = 0$.

Вершины
- съ касат. OX: $\left(\sqrt[5]{\frac{2}{10}}, \sqrt[5]{\frac{4}{10}}\right)$, $\left(-\sqrt[5]{\frac{2}{10}}, \sqrt[5]{\frac{4}{10}}\right)$.
- съ касат. $\parallel OY$ $(\sqrt{27}, \sqrt{3})$; $(\sqrt{27}, -\sqrt{3})$.

219. Двѣ точки возврата 1-го рода $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Асимптота $y = x = 0$

220. Вершина съ касательными $\parallel OX$ $(3, 3)$. Особенная точка $(-1, 1)$—возвратъ 2-го рода. Асимптота $x = 0$; двѣ параболическихъ вѣтви.

221. Въ началѣ координатъ возвратъ 1-го рода.

Вершины
- съ касат. $\parallel OX$: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$,
- съ касат $\parallel OY$ $\left(\frac{4}{9}, -\frac{8}{27}\right)$.

Асимптота: $3y - x + \frac{1}{9} = 0$. Двѣ параболическія вѣтви.

222. Въ началѣ координатъ возвратъ 2-го рода. Асимптота. $x = 1$. Двѣ параболическія вѣтви. Вершина съ касат. $\parallel OX$ $\left(\frac{16}{9}, \frac{256}{27}\right)$.

223. Начало координатъ особ. точка. Вершины, гдѣ касат. $\parallel OX$: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{4}\right)$; вершины гдѣ касат. $\parallel OY$: $\left(\pm\frac{\sqrt{27}}{16}, \frac{9}{32}\right)$. Асимптоты: $y = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{32}$. Есть безконечныя параболическія вѣтви.

224. Начало координатъ двойная точка (узелъ). Асимптота: $y=0$; 4 вершины съ касательными $\parallel OX$.

225. Начало координатъ двойная точка (узелъ). Асимптоты: $y=\pm a$.

226. Вершина съ касат. OY при $t=0$. Асимптота: $x=1$.

227. Вершины съ касат. $\parallel OY$ при $t=1\pm\sqrt{3}$. Вершина съ касат. $\parallel OX$ при $t=3$. Асимптота $x=0$.

228. Вершина съ касательными OX при $t=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Вершины съ касат. $\parallel OY$ при $t=0$ и $t=\infty$. Асимптоты: $y=+\frac{1}{2}$ и $y=-\frac{1}{2}$.

229. Вершины съ касат. $\parallel OX$ въ точкахъ, соотвѣтствующихъ $t=\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}$; $t=+\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}$. Асимптоты $x+y+2=0$; $x+y-2=0$; $x=0$.

230. Вершины съ касат. OX при $t=-2\pm\sqrt{5}$. Вершина съ касат. $\parallel OY$ при $t=0$. Асимптоты $x=1$; $x=\frac{4}{3}$; $y=2$, $y=\frac{2}{3}$.

231. Вершины съ касат. $\parallel OX$ при $t=\pm\sqrt{\sqrt{12}-3}$. Вершина съ касат. $\parallel OY$ при $t=0$. Двойная точка $x=0$; $y=0$. Асимптота $x=1$.

232. Вершинъ нѣтъ. Въ началѣ координатъ тройная точка. Асимптота. $y=x+1$. Двѣ параболическихъ вѣтви.

233. Вершины съ касательными $\parallel OY$ при $t=-1\pm\sqrt{2}$. Вершина съ касательной $\parallel OX$ при $t=0{,}596..$ (корень уравненія $t^3+3t-2=0$). Двойная точка при $t=0$ или $t=1$. Асимптота: $x=1$.

234. Вершины, гдѣ касат. $\parallel OX$ при $t=-2$. Вершины, гдѣ касат. $\parallel OY$ при $t=2$. Точка возврата при $t=0$. Асимптоты $x=\frac{9}{2}$, $y=\frac{9}{2}$; $x=y=6$.

235. Асимптоты: $2y=x-\frac{3}{2}$; $x=-\frac{1}{2}$. Вершины съ касат. $\parallel OY$ при $t=0$ и $t=2$. Двойная точка при $t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

236. Уравненіе кривой $y^2=-\frac{2x^3}{p+2x}$. Начало координатъ — точка возврата 1-го рода. Асимптота $x=-\frac{p}{2}$.

237. При надлежащей координатной системѣ уравненіе кривой будетъ: $(x^2+y^2)y^2-R^2x^2=0$. Въ началѣ координатъ двойная точка. Асимптоты $y=\pm R$. Вершинъ нѣтъ.

238. Уравненіе кривой: $y^2=x^2\frac{a-x}{a+x}$. Двойная точка въ началѣ координатъ. Асимптота. $x+a=0$. Вершина съ касательной $\parallel OY$ $(a, 0)$. Двѣ вершины съ касательною $\parallel OX$: $\left(a\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \pm a\frac{\sqrt{5\sqrt{5}-11}}{2}\right)$.

239. Взявъ точку A за начало координатъ и линію AO за ось абсциссъ, находимъ уравненіе кривой: $x^4-2Rx^3+R^2y^2=0$. Въ началѣ координатъ возвратъ 1-го рода. Вершины съ касательными OX $\left(\frac{3R}{2}, +\frac{\sqrt{27}}{4}R\right)$. Вершины съ касательными $\parallel OY$ $(2R, 0)$.

240. При надлежащей координатной системѣ уравненіе кривой будетъ: $(x^2+y^2)^2=-ax(x^2-y^2)$. Три вѣтви въ началѣ координатъ, касающіяся прямыхъ: $x=0$; $x=y$, $x=-y$. Три вершины съ касательными $\parallel OY$: $(d, 0)$; $\left(-\frac{1}{8}d, \pm\frac{1}{8}d\sqrt{3}\right)$. Четыре вершины съ касательными $\parallel OX$: $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{4}d, +\frac{d}{4}\right)$; $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{4}d, \pm\frac{d}{4}\right)$

241. Обозначая черезъ R радіусъ каждаго изъ данныхъ пруговъ, получаемъ при надлежащемъ выборѣ системы координатъ уравненіе кривой: $y^4(x^2-R^2)+$

$+(R^2 - x^2 - 2Ry)^2 = 0$. Двѣ точки возврата 1-го рода: $x = +R$, $y = 0$; $x = -R$, $y = 0$. Двѣ вершины, въ которыхъ касательная $\parallel OY$: $y = R$, $x = 0$; $y = -\frac{R}{3}$, $x = 0$. Двѣ точки перегиба.

242. Если взять за оси координатъ данный діаметръ и діаметръ къ нему перпендикулярный, то уравненіе искомой кривой будетъ: $(x^2 + y^2)(x^2 + 2y^2 - 2xy) = 4R^2y^2$. Кривая симметрична относительно начала координатъ, имѣетъ двѣ вершины, гдѣ касательная $\parallel OX$, и четыре вершины, гдѣ касательная $\parallel OY$.

243. Уравненіе кривой: $(b^2x^2 + a^2y^2)^2(a^6y^2 + b^6x^2) = a^4b^4(a^2 - b^2)^2x^2y^2$. Черезъ начало координатъ проходятъ 4 вѣтви кривой. Четыре вершины, гдѣ касательная $\parallel OX$; для этихъ вершинъ $\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2\sqrt{a^4 + 8b^4}}{2a^4}}$. Четыре вершины, гдѣ касательная $\parallel OY$, для этихъ вершинъ $\frac{x}{y} = \pm\sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2\sqrt{a^4 + 8a^4}}{2b^4}}$.

244. Уравненіе кривой: $(x^2 + y^2)^2(a^2x^2 + b^2y^2) = a^2x^2 - b^2y^2)^2$. Черезъ начало координатъ проходятъ 4 вѣтви кривой, касательныя къ прямымъ $ax = \pm by$. 6 вершинъ, гдѣ касательная $\parallel OX$, 6 вершинъ, гдѣ касательная $\parallel OY$.

245. Если длина перемѣнной прямой l, то при надлежащемъ выборѣ осей уравненіе кривой будетъ $(x^2 + y^2)^3 = l^2x^2y^2$. Черезъ начало проходятъ 4 вѣтви кривой. Вершины съ касательными $\parallel OX$: $\left(\pm l\sqrt{\frac{2}{27}}, \pm l\sqrt{\frac{4}{27}}\right)$. Вершины съ касательными $\parallel OY$: $\left(\pm l\sqrt{\frac{4}{27}}, \pm l\sqrt{\frac{2}{27}}\right)$.

246. Уравненіе кривой $(x^2 + y^2)^2(a^2y^2 + b^2x^2) = (a^2 - b^2)^2x^2y^2$. Начало координатъ особенная точка, черезъ которую проходятъ 4 вѣтви. Четыре вершины, гдѣ касательная $\parallel OX$, для этихъ вершинъ $\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + 8b^2}}{2a}}$. Четыре вершины, гдѣ касательная $\parallel OY$; для этихъ вершинъ $\frac{x}{y} = \pm\sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 + 8a^2}}{2b}}$.

247. Уравненіе кривой $a^2(y^2 - b^2)^2 = 4b^2x^2(y^2 + b^2) = 0$. Двѣ особенныхъ точки: $(0, +b)$; $(0, -b)$. Двѣ вершины съ касат. $\parallel OY$: $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$. Двѣ асимптоты $ay \pm 2bx = 0$.

248. Если средину разстоянія между данными точками взять за полюсъ, а прямую, соединяющую эти точки, за полярную ось, то уравненіе искомой кривой будетъ $\rho^2 = c^2 + \frac{a^2}{\sin\theta}$. Кривая имѣетъ одну асимптоту и одну особенную точку, которая будетъ изолированной при $c^2 < a^2$ и узловой при $c^2 > a^2$.

249. 1. Уравненіе кривой для эллипса $a^2(a^2 - b^2 - x^2)^2 = b^2y^2(a^2 - x^2)$. Двойныя точки въ фокусахъ эллипса. Асимптоты: $x = \pm a$. Вершины съ касательной $\parallel OX$: $\left(0, \pm\frac{a^2 - b^2}{b}\right)$. 2. Уравненіе кривой для гиперболы: $a^2(a^2 + b^2 - x^2)^2 = b^2y^2(a^2 - x^2)$. Двойныя точки въ фокусахъ гиперболы. Асимптоты: $x = \pm a$, $by = \pm ax$. Вершинъ нѣтъ.

250. Взявъ начало координатъ въ центрѣ круга и OA за ось абсциссъ, получимъ уравненіе кривой: $R^2(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x - a)^2(x^2 + y^2)$. I. $R > a$. Двѣ особенныя точки: $(0, 0)$ и $(a, 0)$. Кривая замкнутая. II. $R < a$. Изолированная точка $(0, 0)$. Особенная точка $(a, 0)$. Двѣ асимптоты.

251. $\frac{x - 1}{12} = \frac{y - 3}{-4} = \frac{z - 4}{3}$.

252. $\frac{x + 2}{17} = \frac{y - 1}{28} = \frac{z - 6}{4}$.

253. Уравненія касательной: $\begin{cases} y = \sqrt{p(p + q)} - px + \frac{p(p + q)}{2}, \\ y = \sqrt{q(p + q)} - qx + \frac{q(p + q)}{2}. \end{cases}$

Искомая длина $\frac{p + q}{\sqrt{2}}$.

254. $x = y = \frac{z^2 + 2x_0^2}{4x_0}$.

255. $\frac{X - x}{\sqrt{a}} = \frac{Y - y}{\sqrt{b}} = \frac{Z - z}{\sqrt{2z}}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a + b + 2z}}$; $\cos\beta = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a + b + 2z}}$;

$\cos\gamma = \frac{\sqrt{2z}}{\sqrt{a+b+2z}}$

256. $\frac{X-x}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{Y-y}{\cos\frac{t}{2}} = \frac{Z-z}{\operatorname{cotg}\frac{t}{2}}$; $\cos\alpha = \sin^2\frac{t}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}\sin t$, $\cos\gamma = \cos\frac{t}{2}$.

257. Уравненія касательной $\frac{X-x}{t^2} = \frac{Y-y}{t} = \frac{Z-z}{1}$. Искомыя точки: $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(4, -\frac{8}{3}, 2\right)$.

258. $\frac{X-x}{t\sin t} = \frac{Y-y}{\cos t} = \frac{Z-z}{1}$. Касательная ∥ плоскости YOZ въ точкахъ $(\pm 2n\pi, 1, 2n\pi+1)$ и $(\pm(2n+1)\pi, -1, (2n+1)\pi+1)$. Касательная ∥ плоскости XOZ въ точкахъ $\left(1, \frac{4n+1}{2}\pi, \frac{4n+1}{2}\pi+1\right)$ и $\left(-1, -\frac{4n-1}{2}\pi, \frac{4n-1}{2}\pi+1\right)$. Черезъ n обозначено произвольное цѣлое число.

259. $s = 5$. Данная кривая есть винтовая линія на цилиндрѣ $(x-z)^2 = 3y\left(1-\frac{2}{9}y\right)^2$.

263. Циклоида.

262. Гиперболоидъ вращенія

265. $x+y=2z$.

266. $x+y \mp \frac{p}{\sqrt{4a^2-p^2}}z = p$.

267. Уравненія искомой плоскости $X\operatorname{tg}\varphi = Y\sin\alpha + Z\cos\alpha$.

268. $6x - 8y - z + 3 = 0$.

269. $aY + b - z = 0$.

270. $Xy - Yx = Z\sqrt{2} + z\sqrt{2} = 0$.

271. $bxX - ayY = 0$.

273. Уравненія главной нормали: $\frac{X-x}{t^3-2t} = \frac{Y-y}{1-t^4} = \frac{Z-z}{2t^3-t}$. Уравненія бинормали: $\frac{X-x}{1} = \frac{Y-y}{2t} = \frac{Z-z}{t^2}$.

274. Уравненія главной нормали: $\frac{X-x}{\sqrt{a}} = \frac{Y-y}{\sqrt{b}} = \frac{Z-z}{\frac{a+b}{2\sqrt{az}}}$. Уравненія бинормали: $\frac{X-x}{\sqrt{b}} = \frac{Y-y}{\sqrt{a}} = \frac{Z-z}{0}$.

275. Главная нормаль $\frac{x-1}{-31} = \frac{y-1}{-26} = \frac{z-1}{22}$. Бинормаль: $\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-1}$.

278. Винтовая линія.

280. Геом. мѣсто центровъ кривизны простой винтовой линіи представляетъ тоже винтовую линію, которая будетъ расположена на томъ же цилиндрѣ, если шагъ винта равенъ длинѣ окружности основ. цилиндра.

281. $R_1 = \sqrt{6}$.

282. $R = \frac{(a+b+2z)^{3/2}}{(a+b)^{1/2}}$.

283. $R_1 = \frac{4}{\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}}$.

284. $R_1 = R\sqrt{2}\frac{ch^2 t}{sh\, t}$.

285. $R_2 = \pm\frac{64y^6+36y+1}{12y}$.

286. $R_2 = R\, ch^2 t$.

287. $R_1 = R_2 = \frac{(y+a)^2}{a}$.

288. $R_1 = \frac{(x+y)^2}{\sqrt{2}}$; $R_2 = \frac{(x-y)^2}{\sqrt{2}}$.

289. $R_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}e^t$; $R_2 = 3e^t$.

290. $R_1 = \frac{a}{2}ch\,\theta$; $R_2 = a$.

291. $17x + y - 4z = 12a$.

292. $x + y + 3z = 9$.

293. $Xx^{m-1} + Yy^{m-1} + Zz^{m-1} = a^m$.

294. $x_0(2m_0^2 - a^2)X + y_0(2m_0^2 + a^2)Y + z_0(2m_0^2 - a^2)Z = m_0^4$, гдѣ $m_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$.

295. $x \quad y + 2z = \sqrt{\frac{2}{11}}$ и $x - y + 2z = -\sqrt{\frac{2}{11}}$.

296. Уравненіе касательной плоскости: $X \sin v - Y \cos v + \frac{u}{k} Z = uv$. Уравненія нормали: $\frac{X \quad u \cos v}{\sin v} = \frac{Y - u \sin v}{-\cos v} = \frac{k(Z \quad kv)}{u}$.

297. $6uv(X - x) + 3(u + v)(Y \quad y) + 2(Z - z) = 0$.

298. Двѣ прямыя $\begin{cases} \frac{Ax}{a^2} + \frac{By}{b^2} \quad \frac{Cz}{c^2} \quad 1; & \frac{Bx - Ay}{ab} + z \quad C \\ \frac{Ax}{a^2} + \frac{By}{b^2} \quad \frac{Cz}{c^2} \quad 1, & \frac{Bx - Ay}{ab} - z - C \end{cases}$

299. Прямыя: $\begin{cases} \frac{Ax}{a^2} \quad \frac{By}{b^2} \quad z + C, & \frac{A}{a} \quad x \quad \frac{B}{b} \quad y. \\ \frac{Ax}{a^2} - \frac{By}{b^2} \quad z + C, & \frac{A}{a} - x = \frac{B}{b} - y. \end{cases}$

300. Прямыя. $\begin{cases} X - A, & AY - aZ. \\ Y \quad B, & BX - aZ. \end{cases}$

301. $V = \frac{9}{2} a^3$

302. Сумма отрѣзковъ равна a.

303. Проходятъ черезъ начало координатъ.

304. $x + y + z = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

305. Искомая ордината $p = m\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

306. Уравненіе поверхности

$$x \cos\left(Z - \frac{k\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{a}\right) + y \sin\left(z \quad \frac{k\sqrt{x^2 + y^2 \quad a^2}}{a}\right) \quad a.$$

313. $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2\lambda y = 0$, гдѣ λ произвольный параметръ

314. $x^2 + y^2 + z^2 \quad 3a\sqrt[3]{xyz}$

315. Поверхность упругости. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$.

320. Гиперболическій параболоидъ

321. Гиперболическій параболоидъ

322. $x \quad az)^2 + (y - bz)^2 = 2R(y - bz)$.

323. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = \frac{(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^2}{14} + 1$.

324. $(x + 1)^2 - 2y^2 + z^2$.

325. $(bz - cy)^2 = 2p(z - c)(az - cx)^2$.

326. $\left[\frac{x^2 + y^2}{z + c}\right]^2 = \frac{r^2}{c^2}(x^2 - y^2)$.

327. $4xy + (z + 3c)^2 = 0$.

328. $y^4 = 4p^2(x^2 + z^2)$.

329. $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 = 4(x^2 + z^2)a^2$.

330. Около ox: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 \quad y^2 - z^2)$.
» oy: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + z^2)$.

331. $4(x^2 + y^2) = (z + 2)^2$.

332. $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + (lx + my + nz)^2$.

333. Циклоида.

334. $xy^2 = \frac{2}{3p}$

335. $y^2(z \pm \sqrt{l(l \quad a)})^2 \quad p(2x + q)$.

336. $x^2 + y^2 + z^2 \quad r^2 \quad \frac{(lx + my + nz)^2}{l^2 + m^2 + n^2}$.

337. $(r \pm \sqrt{x^2 + y^2})^2 = R^2 = z^2$

338. Коническая поверхность.

339. $(2ax)^2 + (2by)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$, если заданъ эллипсъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.

340. Параболическій цилиндръ. $y^2 = 2px + 2qz$, если заданныя параболы имѣютъ уравненія $y^2 = 2px$, $z = 0$ и $y^2 = 2qx$, $x = 0$.

341. Взявъ за оси координатъ ребра трехграннаго угла, получимъ уравненіе вида $xyz = m^3$, гдѣ m постоянное, зависящее отъ даннаго объема и отъ элементовъ даннаго угла.

342. $x^{\frac{n}{n+1}} + y^{\frac{n}{n+1}} + z^{\frac{n}{n+1}} = c^{\frac{n}{n+1}}$.

343. $R_1 = R_2 = \frac{k^2 + u^2}{k}$

344. Кривая: $ay + xz = 0$, $z^2 \quad x^2 = a^2$ или $x = a\,sh\,t$, $y = \frac{a}{2} z = a\,ch\,t$. $sh\,2t$,

345. $R_1 \quad \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}{a}(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + a^2})$.

$$R_2 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}{a} \; z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + d^2}).$$

346. $R_1 = - R_2 - e^{x} + e^{-x} - \cos x \cos y.$

347. $R_1 = - R_2 - ch\, x\, ch\, y.$ **348.** $x^2 + y^2 + z^2 - ax.$

349. Точки пересѣченія эллипсоида съ прямыми

$$\begin{cases} z - 1 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z - 1 = 0. \\ 3x + 4y - 4 = 0. \end{cases}$$

350. $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right) = \frac{r + t}{2}$

ОТДѢЛЪ VI.

1. -36.

2. $\Delta = 7$.

3. $\Delta = 4$.

4. ab

5. $1 + a^2 + b^2 + c^2$.

6. $2(x^3 + y^3)$.

7. $abcd\left(7 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$.

8. $(x-y)(y-z)(z-x)$.

9. $(x_n - x_{n-1})\ldots(x_n - x_1)(x_{n-1} - x_{n-2})\ldots(x_{n-1} - x_1)\ldots(x_2 - x_1)$.

10. $$f(x) = \sum_{p=0}^{p=m} b_p \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{p-1})(x-x_{p+1})\ldots(x-x_m)}{(x_p-x_0)(x_p-x_1)\ldots(x_p-x_{p-1})(x_p-x_{p+1})\ldots(x_p-x_m)}$$

11. $-2\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)$.

12. $-4\sin\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(b-c)\sin\frac{1}{2}(c-a).[\sin(a+b)+\sin(b+c)+\sin(c+a)]$.

13. $x = y = z = t = 1$

14. $x = -5 + 6y,\ z = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y,\ t = -\frac{9}{2} + \frac{11}{2}y$.

15. $x = y = z = t$.

16. $x = -\frac{3}{5}z + \frac{8}{5}t,\ y = \frac{4}{5}z + \frac{1}{5}t$.

18. $-i,\ \pm\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

19. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}i \pm \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{4}i \pm \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

23. $\cos^6\varphi - 15\cos^4\varphi\sin^2\varphi + 15\cos^2\varphi\sin^4\varphi - \sin^6\varphi$

24. $5\sin\varphi - 20\sin^3\varphi + 16\sin^5\varphi$.

25. $8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1 = 1 - 8\sin^2\varphi + 8\sin^4\varphi$.

26. $\frac{1}{8}\cos 4\varphi + \frac{4}{8}\cos 2\varphi + \frac{3}{8}$.

27. $\frac{1}{16}\cos 5\varphi + \frac{5}{16}\cos 3\varphi + \frac{10}{16}\cos\varphi$

29. $f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{tg^2\frac{\pi}{2n}}\right)\left(1 - \frac{x^2}{tg^2\frac{3\pi}{2n}}\right)\ldots$

31. $f(x) = nx\left(1 - \frac{x^2}{tg^2\frac{\pi}{n}}\right)\left(1 - \frac{x^2}{tg^2\frac{2\pi}{n}}\right)\ldots$

32. $1 + (2k+1)\pi i$.

33. $(4k+1)\frac{\pi}{2}i$.

34. $\log\sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i$.

35. $\log\sqrt{1+x^2} + (\operatorname{arctg} x + 2k\pi)i$.

36. $e^{-2k\pi}\{\cos(\log 2) + i\sin(\log 2)\}$.

37. $e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}}$

38. $\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}i$

39. $\sin(x+yi) = \sin x \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} + i\cos x \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$.

$\cos(x+yi) = \cos x \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} - i\sin x \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$

40. $x = i\log(y + \sqrt{1+y^2}) + 2k\pi$, $x = -i\log(y + \sqrt{1+y^2}) + (2k+1)\pi$.

41. Аргументъ увеличивается на 2π. 42. Аргументъ увеличивается на π.

43. Аргументъ увеличивается на π или на 2π, смотря по тому, заключаетъ ли замкнутая кривая только одну изъ точекъ $x = 0$, $x = 1$ или нѣтъ.

45. Если $|c|$ не $= 1$, то кругъ съ центромъ въ a.
Если $|c| = 1$, то прямая.

46. Эллипсъ, оси котораго $|a| + |b|$ и $\big||a| - |b|\big|$.

47. Гипербола.

48. $x = \dfrac{\sin\frac{nb}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\cos\left(a + \dfrac{n-1}{2}b\right)$, $y = \dfrac{\sin\frac{nb}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\sin\left(a + \dfrac{n-1}{2}b\right)$.

49. $\dfrac{1 - a\cos\omega}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$, $\dfrac{a\sin\omega}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$.

50. $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$. 51. $x - 1 + \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

52. $\dfrac{1}{x^2+x+1} - \dfrac{x}{(x^2+x+1)^2}$

53. $x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$.

54. $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{x-1}{(x^2+2)^2} - \dfrac{x}{x^2+2}$

55. $(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 15(x-1) + 20 + \dfrac{12}{x-1} + \dfrac{3}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^3}$.

56. $\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{x+1}{x^2+1}$. 57. $x + 1 + \dfrac{x+1}{x^2+x+1} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x}$.

58. $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{(1+x)^2} - \dfrac{x}{1+x^2}$ 59. $-x^2 - 2x + 1 - \dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}$.

60. $-\dfrac{1}{2(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{4(x^2+1)} + \dfrac{5}{8}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$.

61. $1 + \dfrac{x-1}{(x^2+x+1)^2} - \dfrac{x-1}{x^2+x+1} - \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1}$

62. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{10}{(2x-5)^2} - \dfrac{2}{2x+5}$. 63. $\dfrac{3}{x^3} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{21x}{(3x^2+1)^2}$.

64. $\dfrac{2x+4}{x^2+2x+2} - \dfrac{2x-4}{x^2-2x+2}$.

65. $\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} + \dfrac{1}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1}\right\}$.

66. $\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{1}{x + 2\cos\frac{\pi}{9}} + \dfrac{1}{x + 2\cos\frac{7\pi}{9}} + \dfrac{1}{x + 2\cos\frac{13\pi}{9}}\right\}$

67. $x_1 = 0{,}884$; $x_2 = 2{,}217$; $x_3 = 5{,}949$.

68. $x_1 = -3{,}9489$; $x_2 = -0{,}2172$; $x_3 = 1{,}166$.

69. $x_1 = -4{,}145$, $x_2 = -2{,}524$, $x_3 = 0{,}669$.

70. $x_1 = -1{,}7912$; $x_2 = 2$; $x_3 = 2{,}7912$. 71. $x_1 = -1{,}732$, $x_2 = 1{,}732$, $x_3 = 3$.

72. $x_1 = -2{,}33$, $x_3 = 2{,}12$, $x_2 = 0{,}20$. Значенія даны по недостатку).

73. Однократное примѣненіе способа Ньютона къ корню x_2 предыдущей задачи даетъ $0{,}201639 < x_2 < 0{,}201641$.

74. $x = 0{,}6527$.

75. $x_1 = -1$, $x_2 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$; $x_{3,4} = \dfrac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{2} \pm i\sqrt{3}\,\dfrac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2}$.

76. $x_1 = \dfrac{1}{3}$; $x_2 = \dfrac{3}{2}$ 77. $x_1 = -\dfrac{3}{2}$; $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

78. $-\frac{2}{3}$; 2.

79. 2, -2; 1, 1.

80. 2, 5; 3

81. $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = 1$, $x_4 = -2$.

82. $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$, 3, 3.

83. 2 и отриц. корень

84. 2, $-\frac{3}{4}$ и въ промежуткахъ $(-3, 0)$ $(0, +1)$.

85. -5.

86. $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $x_5 = 1$

87. $x_1 = \frac{3}{2}$ (тройной корень), $x_2 = -2$ (двукратный корень).

88. $x_1 = -2$ (двукратный корень), $x_2 = -\frac{3}{2}$ (тройной корень).

89. $x_1 = \frac{1}{2}$ (четырехкратный корень); $x_2 = 3$.

90. $x_1 = -4$ (тройной корень); $x_2 = -\frac{2}{3}$ двукратный корень.

91. $x_1 = -1$ (тройной корень), $x_2 = \frac{2}{3}$ (двукратный корень).

92. $f = (x+2)^3 (x-2)^2$

93. $f = (x-1)^3 (x+1)(x+2)$.

94. $f = (x^2+1)^2 (x^2+6x+1)$.

95. $f = (x+2)^3 (x-1)^2 (x-4)$.

96. $f = 7(x+2)^2 (x^4+x^3+2x^2+1)$.

97. Одинъ тройной корень и два двойныхъ.

98. Уравненіе имѣетъ два простыхъ корня и два тройныхъ.

99. 2, $\frac{1}{2}$ и два корня разныхъ знаковъ

100. $2 < x_1 < 1$, $1 < x_2 < 0$, $0 < x_3 < 1$, $3 < x_4 < +$

101. $3 < x_1 < 2$, $-1 < x_2 < 1$, $1 < x_3 < 2$.

102. $0 < x_1 < 1$, $-3 < x_2 < -2$, $0 < x_3 < 1$.

103. $3 < x_1 < 4$, $-2 < x_2 < 1$, $1 < x_3 < 2$.

104. $3 < x_1 < 4$, $-1 < x_2 < 0$, $x_3 = -$

105. $2 < x_1 < 3$, $3 < x_2 < 4$, $x_3 = 5$.

106. Послѣ сближенія продѣлать до 0,1 и однократнаго примѣненія способа Ньютона $-0,1099361 < x < -0,1099360$.

107. $(-1,4) < x_1 < -0,4$, $0,34 < x_2 < 0,399$

108. Одинъ вещественный корень между -1 и 0

109. Однократное примѣненіе способа Ньютона къ корню x_3 задачи № 72 $(2,12 < x_3 < 2,13)$ даетъ $2,128420 < x_3 < 2,128421$.

110. Два вещественныхъ корня въ промежуткахъ $(2, 3)$ и $(3, 4)$

111. Корни мнимые

112. Два вещественныхъ корня въ промежуткахъ $(-1, 1)$ и $(-1, 0)$

113. Два вещественныхъ корня въ промежуткахъ $(-1, 0)$, $(7, 8)$

114. Три вещественныхъ корня въ промежуткахъ $(2, 3)$, $(-1, -2)$, $(-3, -2)$.

115. Одинъ корень 1 другой лежитъ въ промежуткѣ $(2, 3)$.

116. Одинъ вещественный корень въ промежуткѣ $(1, 2)$.

117. Три вещественныхъ корня въ промежуткахъ $(4, 5)$, $(-1, 0)$, $(-6, -5)$

118. Корни заключены въ промежуткахъ $(0, 1)$; $(3, 4)$; $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$;

$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $(-4, -3)$.

119. Два вещественныхъ корня въ промежуткахъ $(-1, 0)$, $(5, 6)$

120. Два вещественныхъ корня въ промежуткахъ $(1, 2)$, $(3, 4)$.

121. Всѣ корни, отличные отъ нуля, вещественны и заключаются въ промежуткахъ: $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(-1, 0)$; $(-2, -1)$, $(4, 5)$, $(-5, -4)$.

122. $0,38 < x_1 < 0,39$, $1,24 < x_2 < 1,25$.

123. $\pm 0,50$, $-1,48$.

124. Если положить $a = tg\,\varphi$, то $x_k = tg\,\frac{\varphi + k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$.

125. Двукратное примѣненіе способа Ньютона Фурье даетъ $0,5110 < x < 0,5111$.

126 Два. $x_2 = 1$; $0{,}7 < x_1 < 0{,}9$.

127 Двукратное примѣненіе способа Ньютона-Фурье къ промежутку (1, 2) даетъ $1{,}0880 < x < 1{,}0884$.

128. Примѣняя три раза способъ Ньютона-Фурье къ промежутку (0, 1), получаемъ $0{,}09127 < x < 0{,}09129$.

129. $0{,}56 < x < 0{,}57$ **130.** $0{,}535 < x_1 < 0{,}536$, $2{,}70 < x_2 < 2{,}71$.

155 Остатокъ $Mx^2 + Nx + P$, гдѣ $M = \dfrac{f(a)(b-c) - f(b)(a-c) + f(c)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$,

$$N = \frac{f(a)(b^2-c^2) + f(b)(a^2-c^2) - f(c)(a^2-b^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)},$$

$$P = \frac{f(a)bc(b-c) - f(b)ac(a-c) + f(c)ab(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

156. $\varphi(x) = \dfrac{4x^2 + 3x - 2}{5}$

157. $f(x) = \dfrac{5x^7 - 21x^5 + 35x^3 - 35x}{105}$. Уравненіе $f(x) = 0$ имѣетъ 2 вещественныхъ корня, заключенныхъ въ промежуткахъ (1, 2) и (−2, −1) (третій вещественный корень $x_3 = 0$

169. При n нечетномъ одинъ корень, при n четномъ ни одного

170 При n нечетномъ одинъ корень при n четномъ ни одного

171. Если $a > 0$ или $a < -n$, то при n четномъ уравненіе не имѣетъ вещественныхъ корней, а при n нечетномъ имѣетъ одинъ корень. Если же $a < 0$ и $a + n > 0$, то пусть будетъ k цѣлое число, удовлетворяющее условіямъ $a + k - 1 < 0$, $a + k > 0$ тогда при n четномъ уравненіе имѣетъ 2 вещ. корня, а при n нечетномъ 1 или 3 корня въ зависимости отъ того, будетъ ли k нечетнымъ или четнымъ

172 $\varphi(x) = 1 + \dfrac{m}{1}x + \dfrac{m(m+1)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots + \dfrac{m(m+1)\ldots(2m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)}x^{m-1}$,

$a = \dfrac{m(m+1)\ldots(2m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} \cdot (2m-1)$.

173. Искомый полиномъ $f(x) = p_0\left\{1 + \dfrac{n}{1 \cdot 2b}(x-a)^2 + \dfrac{n(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4b^2}(x-a)^4 + \right.$
$\left. + \dfrac{n(n-2)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6\, b^3}(x-a)^6 + \ldots\right\}$ при n четномъ и

$f(x) = p_1\left\{x - a + \dfrac{n-1}{2 \cdot 3}(x-a)^3 + \dfrac{(n-1)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5\, b^2}(x-a)^5 + \ldots\right\}$ при n нечетномъ. Всѣ корни вещественные

176. Всѣ корни вещественные, различные и < 0.

ОТДѢЛЪ VII

1. $\frac{1}{a}$

2. $\frac{1}{a}\ (a^a - 1)$

3. $\frac{m}{m+n}$

4. Интегралъ конечный при m a и равный $\frac{m}{m-n}$

5. $\frac{\pi}{2}$.

6. $\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$

7. $\log \sqrt{3}$.

8. $\log \sqrt{\frac{3}{2}}$.

9. $1 - \cos a$

10. 2

11. 0

12. $\operatorname{ctg} a$

13. $\log 2$.

14. $1 \quad \frac{\pi}{4}$

15. $\frac{\pi}{2}$

16. 1

17. 1

18. $\frac{1}{2a}\ \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2}$.

19. $\frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{(x^4 - x^2 + 1)^2}\right]$.

20. $14\frac{4}{7}$

21. 23,8.

22. 1,1072 . . .

23. $\log \frac{4}{3} = 0{,}287684$ . .

24. $\log 3 = 1{,}0986$.

25. 0,38962 . .

26. $\frac{1}{2a}(ax + b)^2 + C$

27. $\frac{A}{b}\left[x - \frac{a}{b} \log (a + bx)\right]$.

28. $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$, если $|x| < 1$.
$\frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1}$, если $|x| > 1$

29. $\frac{1}{2\sqrt{6}} \log \frac{x\sqrt{3} - \sqrt{2}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

30. $\frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \log \frac{x-1}{x+1}$

31. $x + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{12}{x-2} - 6 \log (x-2)$

32. $\frac{1}{x} + \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

33. $x + 2 \log (x-1) + 5 \log (x-2) - \frac{9}{x-2}$

34. $\frac{1}{4} \log \frac{x-2}{x} - \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{2x}\right) - \frac{1}{2(x-2)}$.

35. $\frac{3(x-1)}{16(x+1)} - \frac{x+1}{16(x-1)} - \frac{(x-1)^2}{32(x+1)^2} + \frac{3}{16} \log \frac{x+1}{x-1}$

36. $\frac{x^6}{(x-1)^2(x+1)}$.

37. $\frac{1}{a^2+b^2}\left[\log \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b}\right]$.

38. $\frac{1}{2(n+1)}\log\frac{1+x}{1-x}+\frac{\sqrt{n}}{1+n}\operatorname{arctg}(x\sqrt{n})$, если $n>0$.

$\frac{1}{2(1-m)}\log\frac{1+x}{1-x}-\frac{\sqrt{m}}{2(1-m)}\log\frac{x\sqrt{m}+1}{x\sqrt{m}-1}$, если $n<0$, $n=-m$.

39. $\frac{1}{x}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{3}{4}\log\frac{x+1}{x-1}$.

40. $-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{\log(x+1)}{2}-\frac{\log(x^2+1)}{4}$.

41. $\frac{0{,}4}{1+2x}-0{,}5\log(1+x)-0{,}07\log(1+x^2)+0{,}64\log(1+2x)+0{,}02\operatorname{arctg}x$.

42. $\frac{x+3}{2(1-x^2)}+\log\frac{x^2}{\sqrt[4]{(x+1)^5(x-1)^3}}$.

43. $\frac{3x^2-1}{3x^3}+\log\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg}x$.

44. $\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+\frac{1}{648}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$.

45. $\frac{2aB-Ab}{a\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+\frac{A}{a}\log\sqrt{ax^2+bx+c}$.

46. $\frac{1}{3}\log\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

47. $\frac{1}{8}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

48. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

46. $-x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

50. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

51. $\frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

52. $\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{4a^2}\log\frac{a+x}{a-x}$.

53. $\frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

54. $\frac{x^2}{16(x^4+1)}-\frac{x^2}{8(x^4+1)^2}+\frac{\operatorname{arctg}x^2}{16}$.

55. $-\frac{1}{2x^2}-\frac{x^2}{4(x^4+1)}-\frac{3\operatorname{arctg}x^2}{4}$.

56. $\frac{1}{12}\log\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

57. $\frac{1}{6}\log\frac{1+x}{1-x}\left|\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\right|^2+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$.

58. $\frac{(x+1)^2}{2}+\log\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right)-\operatorname{arctg}x$

59. $-\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

60. $\log\frac{x}{\sqrt[4]{(1+x)^2(1+x^2)}}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

61. $\frac{1}{4}\log\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right\}$.

62. $\log\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$

63. $\log\sqrt[6]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}+\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$

64. $\log\sqrt{\frac{(x^3-x+1)^5}{x+2}}$.

65. $\frac{x}{x^2+x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{1+2x}{\sqrt{3}}-2\log(x^2+x+1)+\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+2x.$

66. $\frac{4}{5}\log(x+2)+\frac{1}{10}\log(1+x^2)+\frac{3}{5}\,arctg\,x.$

67. $\frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{3/2}-(x+b)^{3/2}\right].$

68. $\log(\sqrt[3]{x}-1)-\frac{\log(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{2}+\sqrt{3}\,arctg\,\frac{(2\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{3}}{3}.$

69. $6\sqrt[6]{x}+\frac{6x\sqrt[6]{x}}{7}-3\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}-\frac{\log(1+\sqrt[6]{x})}{3}+$

$+\log(1+\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x})-2\sqrt{3}\,arctg\,\frac{(2\sqrt[6]{x}-1)\sqrt{3}}{3}.$

70. $4\sqrt{\sqrt{x}+2a^2}-a-2\sqrt{2a}\,arctg\sqrt{\frac{\sqrt{x}+2a^2-a}{2a}}.$

71. $\arcsin\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right).$

72. $\frac{2}{3b^2}(3xb-2a^2+3bx)\sqrt{a+bx}$

73. 1. $a>0$, c любое: $\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left[ax+\frac{b}{2}+\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right]$, при подстановкѣ $\sqrt{ax^2+bx+c}=z-x\sqrt{a}$.

2. $a<0$, $c>0$: $-\frac{2}{\sqrt{-a}}\,arctg\left[\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}}{x\sqrt{-a}}\right]$, при подстановкѣ $\sqrt{ax^2+bx+c}=xz-\sqrt{c}$ или $\frac{1}{\sqrt{-a}}\,arccos\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)$, при подстановкѣ $z=\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$.

3. $a<0$, $c<0$: $\frac{2}{\sqrt{-a}}\,arctg\left[\frac{(x-x_1)\sqrt{-a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right]$, при подстановкѣ $z=\frac{x-x_1}{x-x_2}$, если x_1 и x_2 суть веществ. корни трехчлена ax^2+bx+c, или $\frac{1}{\sqrt{-a}}\,arctg\left[\frac{2ax+b}{2\sqrt{-a}\sqrt{ax^2+bx+c}}\right]$, при подстановкѣ $z=\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$

74. $\log(x+\sqrt{x^2\pm a^2})=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}+x}{\sqrt{x^2\pm a^2}-x}+C.$

75. $\arcsin\frac{x}{a}=C_1-\arccos\frac{x}{a}=2\,arctg\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C.$

76. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{a^2+x^2}).$

77. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$

78. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2-a^2}).$

79. $\log(2x-a+2\sqrt{x^2-ax}).$

80. $arctg\,\frac{2x-a}{2\sqrt{ax-x^2}}$ или $\arcsin\left(x-\frac{a}{2}\right)$

81. $\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(3x+\frac{1}{2}+\sqrt{9x^2+3x+3}\right).$

82. $arctg\,\frac{3+2x}{2\sqrt{2-3x-x^2}}$ или $\arccos\frac{-(2x+3)}{\sqrt{17}}.$

83. $-\,arctg\,\frac{1-x}{\ldots}.$

84. $\frac{x(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}{4} - \log\sqrt{x+\sqrt{x^2+2}}$.

85. $\frac{1}{12}\left[(6x\sqrt{x}-8x+9\sqrt{x}-16)\sqrt{1-x} - 9\arcsin\sqrt{x}\right]$.

86. $3\sqrt{x^2+2x+2} - 4\log(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$.

87. $\frac{(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}}{2} + 4\,\mathrm{arctg}\frac{1-\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

88. $\frac{(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}}{2} - \log(x-1+\sqrt{x^2-2x-1})$.

89. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3x^2-3x+1} + \frac{1}{8\sqrt{3}}\log\left[\sqrt{3x^2-3x+1}+\sqrt{\frac{3}{2}}(2x-1)\right]$.

90. $\log\frac{x}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}$.

91. $\frac{x(x+\sqrt{x^2-1})}{2} - \log(x+\sqrt{x^2-1})$

92. $x+\sqrt{x^2-x+1}+\log\frac{(x-1)^2}{2\sqrt{x^2-x+1}+x+1} + \frac{1}{2}\log[2\sqrt{x^2-x+1}+2x-$

93. $\frac{48x^3+8x^2+14x-37}{144}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{32}\log(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1) -$

$-\frac{x^4}{3}-\frac{2x^3}{9}$.

94. $\log\frac{1+x^2+\sqrt{1+3x^2+x^4}}{x}$.

95. $\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + \log(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$

96. $\frac{x^3}{12}\sqrt{4a-3x^2}$.

97. $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$

98. $\frac{x}{9\sqrt{x^2+3}} - \frac{x^3}{27(x^2+3)^{3/2}}$.

99. $\frac{8(2x+1)}{9(x^2+x+1)^{1/2}} - \frac{2(2x+1)^3}{27(x^2+x+1)^{3/2}}$.

100. $\sqrt{(a-x)(x-b)} - (a-b)\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$.

101. $\frac{(x-2)\sqrt{x+1}}{3(x-1)\sqrt{x-1}}$.

102. $\frac{1}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-2}}{x-\sqrt{x^2-2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{x^2-2}-x\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2-2}+x\sqrt{\frac{2}{3}}}$.

103. $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

104. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \log(x+\sqrt{x^2+1})$.

105. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x} + \log(x+\sqrt{1+x^2})$.

106. $-2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

107. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2-x^2}}{x\sqrt{3}}$

108. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}$

109. $\frac{a}{b}\,\mathrm{arctg}\frac{bx}{a\sqrt{a^2-b^2-x^2}}$

110. $\frac{1}{\sqrt{24}}\log\frac{\sqrt{x^2+x+1}+(x+1)\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)\sqrt{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(1-x)\sqrt{2}}$

111. $\sqrt{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\log\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right) + \frac{4}{3}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

112. $\sqrt{1+ax} + \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+ax}-1}{\sqrt{1+ax}+1}$

113. $\log \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{2} - \log \frac{(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1)}{4} +$

$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{(2\sqrt[3]{x^2+1}+1)\sqrt{3}}{3}$.

114. $\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}\right)\sqrt{x^2+1}$.

115. $\frac{\sqrt{1+2x^2}}{6}(x^2-1)$

116. $\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x\right)\sqrt{x^2+1} + \frac{3}{8}\log(x+\sqrt{x^2+1})$

117. $\frac{(3x^2+2)\sqrt{1-x^2}}{8x^4} - \frac{3}{8}\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

118. $\log\sqrt{2}\left[\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right]^{-1/2} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x+1}}$.

119. $\frac{1}{6\sqrt[3]{9}}\log\frac{\left[x+\sqrt[3]{3x^3+12}\right]^3}{x^3+3} - \frac{1}{\sqrt{27}\sqrt[3]{9}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{x^3+4}+x}{x\sqrt{3}}$.

120. $\frac{\sin x}{\cos x}$.

121. $\frac{\cos^3 x(3\cos^2 x-5)}{15}$

122. $-\frac{\sin^4 x+3\cos^4 x}{4}$.

123. $\log\frac{\sqrt[6]{\operatorname{tg} x-1}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{(2\operatorname{tg} x+1)\sqrt{3}}{3}$.

124. $-\frac{1}{8\operatorname{tg}^2 x} - \frac{\log\operatorname{tg} x}{16} + \frac{\log(4+\operatorname{tg}^2 x)}{32}$

125. $\frac{\sqrt{2}}{2}\log\operatorname{tg}\frac{4x+\pi}{8}$

126. $\frac{1}{\sin\alpha}\log\frac{\sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}$

127. $6\left(\frac{\cos\frac{7x}{12}}{7}+\frac{\cos\frac{5x}{12}}{5}\right)$.

128. $\log\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \cos x\log\operatorname{tg} x$

129. $\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \log\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$.

130. $\frac{\cos x}{2+\sin x}$

131. $\log\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2 x}$.

132. $-x\cdot\frac{\log\cos x}{\operatorname{tg} x}$.

133. $\frac{1+\log\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}$.

134. $\log\sin\frac{x}{2} - x\operatorname{cotg} x$

135. $2\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)$

136. $\sqrt{2}\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{4}\right)+C_1$, или въ видѣ $\sqrt{2}\log\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\sqrt{2}+\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}+C_2$,

или въ видѣ $\sqrt{2}\log\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{4}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{4}+1-\sqrt{2}}\right]+C_3$

137. $-a\operatorname{arctg}\frac{a\sin x}{\sqrt{b^2\cos^2 x-a^2}} - 2b\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b^2\cos^2 x-a^2}+\sqrt{b^2-a^2}}{b\sin x}$

138. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\cos x-\sin x+\sqrt{2}}{\sin x+\cos x} - \frac{\cos 2x}{2(\sin x+\cos x)}$.

139. $\frac{(tg^2 x - 1)(tg^4 x + 10\, tg^2 x + 1)}{3\, tg^3 x}$

140. $\log \sqrt{\frac{1 + tg\, x}{1 - tg\, x}}$.

141. $\frac{1}{2}\, tg\, x + \frac{1}{2} \log tg\, x$.

142. $\log (\sin x + \cos x)$.

143. $\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\, arctg \left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}}\, tg \frac{x}{2} \right)$ при $a^2 > b^2$

и $\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{b + a \cos x + \sin x \sqrt{b^2 - a^2}}{a + b \cos x}$ при $a^2 < b$

144. $\frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$.

145. $\sqrt{tg^2 x - 1} - \log (tg\, x + \sqrt{tg^2 x - 1})$.

146. $\frac{1}{a\sqrt{a^2 - m^2}}\, arctg \left(\frac{\sqrt{a^2 - m^2}}{a}\, tg\, x \right)$ при $a^2 > m^2$

$\frac{1}{a\sqrt{m^2 - a^2}} \log \left| \frac{a + \sqrt{m^2 - a^2}\, tg\, x}{a - \sqrt{m^2 - a^2}\, tg\, x} \right|$ при $a^2 < m^2$

147. $\frac{5}{3}\, arctg \frac{\sqrt{9 \cos^2 x - 1}}{5 \sin x} + arctg \frac{\sqrt{9 \cos^2 x - 1}}{\sin x} - \frac{\sin x}{2} \sqrt{9 \cos^2 x - 1}$

148. $\frac{1}{2} \log \sqrt{\frac{tg\, x + \sqrt{2}\, tg\, x + 1}{tg\, x - \sqrt{2}\, tg\, x + 1}} + \frac{1}{2}\, arctg \frac{\sqrt{2}\, tg\, x}{1 - tg\, x}$

149. $\arccos [\sqrt{2} \sin (45^\circ - x)]$

150. $-\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$

151. $x \left\{ \frac{1}{\log_x e} - 1 \right\}$.

152. $x [(\log x)^3 - 3 (\log x)^2 + 6 \log x - 6]$

153. $x \log (1 + x^4) - 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \sqrt{2}\, arctg \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$.

154. $\frac{0{,}05}{2x + 5} + 0{,}01 \log x - 0{,}01 \log (2x + 5) - \frac{0{,}25 \log x}{(2x + 5)^2}$.

155. $\frac{1}{4(x + 1)^2} - \frac{\log (x - 1)}{2(x + 1)^2} + \frac{1}{8} \log \frac{x - 1}{x + 1}$

156. $\log \sqrt{x^2 - x + 1} - \log x - \log (x^2 - x + 1) + \sqrt{3}\, arctg \frac{(2x - 1)\sqrt{3}}{3}$.

157. $arctg \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\log x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

158. $\frac{2}{\sqrt{x}} \log (1 - x) + 2 \log \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

159. $\frac{1}{3} (x^2 + a^2)^{3/2} \log \frac{x^2 - b^2}{b^2} - \frac{2}{3} (x^2 + a^2)^{3/2} - \frac{2}{3} (a^2 + b^2)(x^2 + a^2)^{1/2}$

$\frac{2}{3} (a^2 + b^2)^{3/2} \log \frac{\sqrt{x^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{x^2 + b^2} + b}$

160. $\sqrt{1 - x^2} \log \frac{1 - x}{x} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{\sqrt{1 - x^2} + 1}$.

161. $\frac{e^x}{1 + x}$

162. $\frac{x^2 e^x}{2}$.

163. $x - \log (e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1})$.

164. $\frac{2^x (\sin x + \log 2 \cos x)}{1 + (\log 2)^2}$.

165. $\frac{3^x (\sin x \log 3 - \cos x)}{1 + (\log 3)^2}$

166. $0{,}1 (\sin 3x - 3 \cos 3x) e^x$.

167. $x (\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x$.

168. $-\frac{\arcsin x}{x} - \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{1 - x^2} + 1}{\sqrt{1 - x^2} - 1}$.

169. $\sqrt{1 - x^2}\, arctg\, x - \sqrt{2}\, arctg \left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x\sqrt{2}} \right) + arctg \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{x}} \right)$.

170. $x\, a\, ctg \frac{a}{x - a} + a\, arctg \frac{x - a}{a} + \frac{a}{2} \log \left[\left(\frac{x - a}{a} \right)^2 + 1 \right]$.

171. $\log \sqrt[8]{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{\operatorname{arctg} x}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2-1}\right)$.

172. $-\frac{1}{4(1+x)} - \frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x)^2} + \frac{\log(1+x)}{4} - \frac{\log(1+x^2)}{8}$.

173. $\frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{4} - \frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x^2)}$ 174. $-\frac{e^{x^2}}{\sqrt{\cos 2x}}$

175. $\frac{1}{\sqrt{2}} \log\left[e^{x^2}(e^{x^2} - \sqrt{2}\cos 2x)\right]$

176. $\frac{b}{a}x + \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a} \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\, th\frac{x}{2}\right]$.

177. $\frac{3}{8\sqrt{2}} \log\frac{\sqrt{2}+th\,x}{\sqrt{2}-th\,x} - \frac{th\,x}{4(2-th^2 x)}$

178. $\frac{1}{2}th^2\frac{x}{2} - \frac{1}{6}th^3\frac{x}{2}$ 179. $\sqrt[4]{\frac{1+th\,x}{1-th\,x}}$

180. $x(sh\,x + ch\,x + 0{,}5) - ch\,x - sh\,x - 0{,}25\,sh\,2x + 0{,}5\,sh^2 x$.

181. $sh\,x + \frac{2}{3}sh^3 x + 0{,}2(sh^5 x + ch^5 x)$

182. $\frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{2\,th\,x - 1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+th\,x}$

183. $\frac{1}{\sqrt{1-th\,x}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-th\,x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-th\,x}}$.

184. $\frac{1}{2}\log ch\frac{x}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left[\left(1+\sqrt{2}-th\frac{x}{2}\right)^{\sqrt{2}+1}\left(1-\sqrt{2}-th\frac{x}{2}\right)^{\sqrt{2}-1}\right]$

185. $0{,}5\,th\,x + 0{,}125\sqrt{2}\log\frac{1+\sqrt{2}\,th\,x}{1-\sqrt{2}\,th\,x}$

186. $2\sqrt{ch\,x} - 0{,}4\sqrt{ch\,x}$

187. $\frac{1}{2}\log\frac{ch\,x-1}{ch\,x+1} - \frac{1}{2}th\,x - \frac{1}{2\,sh^2 x}$.

188. $\frac{a}{2}\log\frac{a-\sqrt{a^2-sh^2 x}}{sh\,x} - \frac{\sqrt{1+a^2}}{2}\log\frac{\sqrt{1+a^2}-\sqrt{a^2-sh^2 x}}{sh\,x}$

189. $\frac{1}{48}(2sh\,6x + 9sh\,4x + 6sh\,2x + 12x)$

190. $\log sh\,x - \frac{1}{4sh^4 x} - \frac{1}{sh^2 x}$. 191. $\log ch\,x + \frac{1}{2ch^2 x}$

192. $\log\sqrt{\frac{1+\sqrt{th\,x}}{1-\sqrt{th\,x}}} - \operatorname{arctg}\sqrt{th\,x}$. 193. 1

194. $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 195. π.

196. $\frac{4}{3}$ 197. $\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$.

198. $x\log(x^2-2x+2) - 2x - \log[(1-x)(x-2)^2] + \log 1$

199. $\log 4 - 1$. 200. $\frac{\pi a^2}{4}$

201. $\frac{8}{3} + 2\sqrt{2}\log(\sqrt{2}-1)$. 202. a^2.

203. $\frac{1}{2}\log\frac{1+tg\,a}{1-tg\,a}$. 204. $a^2(1{,}5 - \log 2)$.

205. $\frac{\pi a^2}{4}$ 206. $\frac{\pi a^2}{4}$

207. $\frac{\pi a^2}{4}$. 208. $\frac{a^2}{4}$

209. $\frac{a^4(\pi-2)}{16}$, $\frac{a^4(3\pi+2)}{16}$

210. $\frac{p^2}{1-e^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\,arctg\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,tg\,\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{e\sin\varphi}{2(1+e\cos\varphi)}\right]$.

211. $-\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\varphi}{2+\cos\varphi}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\,arctg\left(\frac{tg\,\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}}\right)$. Полная площадь эллипса $=\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$.

212. $\frac{p^2}{e^2-1}\left[\frac{e\sin\varphi}{2(1+e\cos\varphi)}-\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\log\frac{\sqrt{e+1}\cos\frac{\varphi}{2}-\sqrt{e-1}\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1+e\cos\varphi}}\right]$

213. $18\pi a^2$.

214. 2π.

215. 1.

216. площ. $ALB=\left(\pi-\frac{4}{3}\right)a^2$

площ. $LCD=\left(4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)a^2$.

217 $\frac{16+6\pi}{3}p^2$

218. $2a^2\left(\pi+\frac{4}{3}\right)$.

219. $\frac{4\sqrt{2}}{3}(3-\sqrt{2})^2-\frac{9}{2}\pi+(1+\sqrt{2})\sqrt{6-2\sqrt{2}}+9\,arcsin\frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

220 $\frac{6\pi-2\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})}{3}$.

221. $\frac{2}{3}$.

222. $\frac{88\sqrt{2}}{15}p^2$

223 $\omega_x=\frac{r^2}{2}\,arcsin\frac{x}{r}+\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}-(r-h)x$.

224 $\frac{1}{2}\log\frac{1+tg\,\varphi}{1-tg\,\varphi}$.

225. $\frac{a^2}{2}\log tg\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$.

226. $\omega_y=\sqrt{2ry-y^2}\left(\frac{3r+y}{2}\right)-3r^2\,arctg\frac{\sqrt{2ry-y^2}}{y}+C$; $\omega_r=\left(\frac{3}{4}\pi-2\right)r^2$, $\omega_{2r}=\left(\frac{3}{4}\pi+2\right)r^2$.

227. $\frac{\pi a^2}{\sqrt{3}}(16-\sqrt{243})$.

228. a^2.

229 $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$.

230. $\frac{8}{5}a^2$.

231 Если ω уголъ наклоненія нормали къ оси параболы, то искомая площадь $\frac{16p^2}{3\sin^3 2\omega}$.

232 π.

233. $\frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})+\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

234 $1+\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$.

235. $\log tg\,\frac{3\pi}{8}$.

236. $a\log tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x_0}{2a}\right)$

237. $\frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p}+\frac{p}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$

238. $\frac{8}{27}p\left[\left(1+\frac{9y_0}{4p}\right)^{3/2}-1\right]$.

239. $\frac{\pi a^2}{2}$.

240. $2a(z-2)+a\sqrt{3}\log\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}+2a\sqrt{3}\log(2+\sqrt{5})$, гдѣ $z=\sqrt{\frac{8a-3x}{2a-x}}$.

241. $p(2\sqrt{2}-1)$.

242 $6a$.

243. $a\log\left(\frac{a}{b}\right)$.

244. $\frac{3a}{2}$; длина всей кривой $6a$.

245 $s=\frac{5}{4}a\left\{1+\frac{1}{4\sqrt{3}}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right\}$; длина всей кривой равна $4s$

246. $8a$

247 πa^2.

248. $\frac{a}{k}\sqrt{1+k^2}$.

249. $x+\frac{2x^3}{2p}$

250. $x+\sqrt{2ax}$.

251. $2\sqrt{(a+2b)x_0}$.

252. $x + z$.

253. $\sqrt{3}\,(z - 1)$

254. $8a^3 \log\left(1 - \frac{x}{2a}\right) - \frac{x^3}{3} - ax\,(x + 4a)$

255. $v_x = \frac{\pi}{2}\,(\log 4 - 1)$; $v_y = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$.

256. $\pi p a^2 \left(\frac{pq}{a^2} - \frac{a^2}{pq} - 2\log\frac{pq}{a^2}\right)$.

257. $\frac{\pi}{4}\,[\sqrt{3} + \log(2 - \sqrt{3})]$.

258. $\frac{\pi a^3}{4}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\log(3 + \sqrt{8}) - \frac{2}{3}\right\}$.

259. $\frac{4\sqrt{3} - 6}{9}\,\pi b^2 a$.

260. $\pi\left(\frac{n^3}{60} + \frac{an^2}{2\pi} + \frac{n}{4}\right)$

261. $\frac{272}{405}\,\pi\sqrt{3}$.

262. $\frac{\pi a^6}{6}$

263. $\frac{32\,\pi a^2 b}{105}$

264. $\frac{\pi a^3 (9\pi^2 - 16)}{6}$

265. $\frac{\pi}{20p^2}\,(y^5 - y_0^5)$.

266. $\frac{\pi}{a^2}\,(x - x_0)\left[a\,(x + x_0) - \frac{x^2 + xx_0 + x_0^2}{3}\right]$.

267. $\frac{\pi b^2}{a^2}\,(x - x_0)\left[a\,(x + x_0) + \frac{x^2 + x_0 x + x_0^2}{3}\right]$.

268. $\frac{\pi a^2}{b^2}\,(y - y_0)\left[b^2 + \frac{y^2 + yy_0 + y_0^2}{3}\right]$

269. $\frac{2}{3}\,\pi b^2 h$

270. $\frac{76}{3}\,\pi$.

271. $\frac{16}{3}$.

272. $\frac{\pi a^3}{4}$.

273. $\frac{\pi}{32}$.

274. $\frac{4}{15}\,a^2\sqrt{2pa}$.

275. 2π.

276. $\frac{4}{15}\,a^{5/2}$.

277. $\frac{16}{15}\,a^2\sqrt{ab}$.

278. $\left(\frac{17}{12} - \log 4\right) a^3$.

279. $\frac{\pi}{3}\,(1 + \sqrt{2})^{4/2}$.

280. 2π.

281. $\frac{\pi R^2 a}{2}$.

282. $\frac{5}{3}\,ab\sqrt{2pa}$.

283. $\frac{a^2 b}{2}$.

284. $\frac{2}{3}\,(9a + b)\,ah$.

285. $\frac{7}{3}\,\pi$.

286. $\frac{\pi\sqrt{8}}{3}$

287. $\frac{\pi a^3}{4}\left\{e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}} + \frac{4b}{a}\right\}$.

288. $v_x = 2\,tg\,\alpha\left\{\frac{x^2}{2}\sqrt{\frac{2r - x}{x}}\left[\frac{3a + r - 2x}{3} + \frac{r}{x}(r - a)\right] + r^2(r - a)\,arctg\sqrt{\frac{2r - x}{x}}\right\} + C$,

где $C = -\pi r^2 (r - a)\,tg\,\alpha$; при $a = r$, $v = \frac{2}{3}\,r^3\,tg\,\alpha$, при $a = 2r$ $v = \pi r^3\,tg\,\alpha$.

289. $\frac{r^2 h}{3}\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{2}{3}\right)$. Общее выражение для объема:

$v_x = -\frac{4}{3\cos\alpha\,\sin 2\alpha}\left\{x^2\sqrt{(2r\cos\alpha - x)\,x}\cdot\left(\frac{r^2\cos^2\alpha}{2x^2} + \frac{r\cos\alpha}{6x} - \frac{1}{3}\right) + r^3\cos^3\alpha\,arctg\sqrt{\frac{2r\cos\alpha - x}{x}}\right\}$. Предѣлы для x: 0 и $r\cos\alpha$.

290. $\frac{8\sqrt{2}}{15}\,a^2\sqrt{ap}\,tg\,\alpha$.

291. $v = \frac{r^2 h}{3}$, $v_1 = \frac{2}{3}\,r^2 h\sin^2\frac{\varphi}{2}$.

292. $v = \frac{r^2 h}{12}\,(3\pi - 4)$, $v_1 = \frac{r^2 h}{6}\left(3\varphi - 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$

293. $v = \frac{2}{3} R^3 \left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.

294. $\frac{1}{4} \pi bcl$.

295 $2\pi (b - a) \sqrt{1 + m^2} \left[\frac{m}{2} (b + a) + a\right]$

296. $4\pi b^2$.

297. $\pi \log (\sqrt{2} + 1) + \pi \sqrt{2}$.

298 $\pi (1 + \sec^4 x)^{1/2} + \frac{\pi}{2} \log \frac{(1 + \sec^4 x)^{1/2} - 1}{(1 + \sec^4 x)^{1/2} + 1} - \pi \sqrt{2} - \frac{\pi}{2} \log \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$.

299. $4\pi^2 ar$

300. πa^4.

301. $\frac{2\pi}{3} [(2x + p) \sqrt{2px + p^2} - p^2]$.

892. $\frac{\pi}{15} \left(\frac{8}{9} p\right)^2 \left[\left(1 + \frac{9}{4p} y_0\right)^3 \left(\frac{27}{4p} y_0 - 2\right) + 2\right]$.

303. $2\pi b^2 + 2\pi ab \frac{\arcsin e}{e}$, гдѣ $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

304. $2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{e} \log \left[\frac{a}{b} (1 + e)\right]$, гдѣ $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

305. $\frac{\pi bx}{a} \sqrt{e^2x^2 - a^2} - \pi b^2 - \frac{\pi ab}{e} \log \frac{ex + \sqrt{e^2x^2 - a^2}}{ea + b}$, гдѣ $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

306. $\frac{\pi ay}{b^2} \sqrt{a^2e^2y^2 + b^4} + \frac{\pi b^2}{e} \log \frac{aey + \sqrt{a^2e^2y^2 + b^4}}{b^2}$, гдѣ $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

307. $s_y = \frac{4}{3} \pi \sqrt{2r} (y + 4r) \sqrt{2r - y} + \frac{32}{3} \pi r^2$, $s_{2r} = \frac{32}{3} \pi r^2$.

308. πa^4.

309. $\pi (x \sqrt{2x^2 - 1} - 1) - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{2x^2 - 1}}{1 + \sqrt{2}}$.

310. $\frac{12 \pi a^2}{5}$.

311. $\frac{12}{5} \pi a^2$.

312. $2\pi a^2$.

313. $\frac{52}{3} \pi$.

314. $\frac{88}{3} \pi$.

315. $4R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

ОТДѢЛЪ VIII.

a) Двойные интегралы.

1. $\frac{a^2 b^2}{c^2}$

2. $\frac{1}{2}\pi ab\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$.

3. $\frac{3}{8}\pi ab\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)$.

4. $ab\left[\frac{ab}{hk}+\left(\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{k^2}\right)\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}\right]$.

5. $\frac{5}{32}\pi ab\left(\frac{a^6}{h^6}+\frac{b^6}{k^6}\right)$.

6. $\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2b^2}{c^4}$.

7. $\frac{\pi}{4}\cdot\frac{a^2b^2}{c^2}$.

8. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{16}\cdot\frac{a^7b}{c^6}$

9. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}ab\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$.

10. $\frac{3\pi}{4}\frac{b^2}{ac^2}$.

11. $\frac{1}{12}ab$

12. $\frac{1}{10}\frac{a^3b}{h^2}$.

13. $\frac{1}{60}\frac{a^3b^3}{c^4}$.

14. $\frac{1}{4}\cdot\frac{a^3bk}{h(ak+bh)}$.

15. $\frac{1}{10}\frac{(ab)^6}{(ak+bh)^6}$

16. $\frac{1}{210}\cdot\frac{a^5b^3}{c^6}$

17. $\frac{1}{6}ab\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$

18. $\frac{a^4bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}$.

19. $\frac{1}{1260}\frac{a^5b^5}{c^8}$.

20. $\frac{a^5bk}{8h^3(ak+bh)^3}(a^2k^2+3abhk+3b^2h^2)$

21. $\frac{7}{128}(2\pi+3\sqrt{3})ab$.

22. $\frac{21\pi}{256}ab\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$

23. $\frac{1}{8}\cdot\frac{(ab)^{4/3}}{c^{2/3}}$.

24. $\frac{55}{64}ab$.

25. $\frac{1}{42}ab\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$.

26. $\frac{1}{30}\cdot\frac{(ab)^{7/2}}{c^{1/2}}$.

27. $\frac{7}{120}a^2$.

28. $\frac{1}{2}(a^2-b^2)\frac{\alpha-\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)}$.

29. $\frac{2}{3}(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3})$.

30. $(a^2-b^2)\log\frac{m}{n}$.

31. $\frac{1}{6}(m^2-n^2)(\alpha^3-\beta^3)$.

32. $\frac{1}{2}(a^2-b^2)\log\frac{\alpha}{\beta}$

33. $\frac{1}{3}(a-b)(m-n)$.

34. $\frac{1}{3}(a^2-b^2)\log\frac{m}{n}$.

35. $\frac{1}{2}(a-b)(c-d)$.

88. $\frac{1}{15}(a^5-b^5)\left(\frac{1}{\partial^3}-\frac{1}{c^3}\right)$.

7. $\frac{1}{12}(a^6-b^6)\left(\frac{1}{\partial^3}-\frac{1}{c^3}\right)$.

38. $\left(\text{Система } x=\frac{u-v}{2},\ y=\sqrt{uv}\right)$

$\frac{1}{3}(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{m}-\sqrt{n})(a+b+m+n+\sqrt{ab}+\sqrt{mn})$.

39. (Система: $x + y = 1 + u - uv^2$, $x - y = v$) $\frac{1}{3}$.

40. $\left(\text{Система: } x = c\,ch\,u\cos v,\ y = c\,sh\,u\sin v,\ J = \frac{c^2}{2}(ch\,2u - \cos 2v)\right)$.

$\frac{c^2}{4}[(v_1 - v_0)(sh\,2u_1 - sh\,2u_0) - (u_1 - u_0)(\sin 2v_1 - \sin 2v_0)]$.

41. $\frac{4}{9}(ab)^{3/2}$.

42. πR^3.

43. $\frac{1}{3}abc$.

44. $\left(\frac{\pi a}{2} - \frac{2}{3}R\right)R^2$.

45. $\frac{1}{18}a^3$.

46. $\pi a^2\sqrt{pq}$.

47. $\frac{1}{2}\pi ac^2$.

48. $\frac{7\pi}{64}$.

49. $\frac{4}{3}$.

50. $\frac{16\sqrt{2}}{5}$.

51. $\frac{15\pi - 8}{180}abc$.

52. $\frac{30\pi + 88}{45}$ (большій изъ двухъ объемовъ).

53. $\frac{88}{105}$.

54. $a^3\left(0.0084 + 0.0625\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

55. π.

56. $\frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi\left(a^2 - R^2\right)^{3/2}$.

57. $\frac{3\pi}{32}\frac{a^4}{c}$.

58. $\pi a^3(\alpha - \beta)$.

59. $\frac{4}{9}\frac{a^3}{\sqrt{a}}$.

60. $\frac{7}{6}\pi$.

61. $\frac{\pi}{8}$.

62. $\frac{81}{32}\pi a^3\left(\text{ввести } x = \frac{a}{2} + r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\right)$.

63. $\frac{R^4}{16c}\cot\frac{\alpha}{2}$.

64. $\frac{a^4}{24c}$.

65. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{a^4}{c}$.

66. $\frac{1}{12}\pi a^3$.

67. $\frac{2}{3}\pi a^3 - \frac{8}{9}(4\sqrt{2} - 5)a^3$.

68. См. 67.

69. $\frac{1}{2}p(a + p)^2$.

70. $\frac{2}{9}(3\pi - 4)a^3$.

71. $\frac{3\pi}{8}(a^2 + b^2)$.

72. $\frac{2}{3}\pi - 2 + 3\sqrt{6}\log(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \frac{16\sqrt{3}}{3}\log(1 + \sqrt{3})$.

73. $\frac{\pi}{96}$.

74. $\frac{1}{5}a^3$.

75. $\frac{7}{12}(9\pi + 10)$.

76. $\frac{32 - 3\pi}{24}\frac{a^4}{c}$.

77. πR^3.

78. $a^3\left(\frac{17}{12} - \log 4\right)$.

79. π.

80. $\frac{1}{8}\pi ab\left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q}\right)$.

81. $\frac{1}{8}\cdot\frac{a^2b^2}{c}$.

82. $\frac{\pi^2}{2}abc$.

83. $\frac{\pi k}{k + 1}abc$.

84. $2\pi abc$.

85. $\frac{4m\pi}{2m+1}abc.$

86. $\frac{1}{8}\pi abc.$

87. $\frac{1}{9}\frac{a^2bc}{h^3}$

88. $\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2bc}{h}.$

89. $3-\sqrt{2}\,abc.$

90. $\frac{\pi}{12}\cdot\left(\frac{ab}{c}\right)^3$

91. $\frac{1}{8}\cdot\frac{a^3b^3}{c^4}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)$

92. $\frac{81}{32}\pi abc$ положить. $x=\frac{a}{2}+a\rho\cos\varphi,\quad y=b\rho\sin\varphi\Big)$.

93. $\frac{1}{4}\frac{a^2b^2}{c}\left[\frac{a^2b^2}{l^2k^2}+\frac{\pi}{4}\left(\frac{a^4}{l^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)\right]$

94. $\frac{a^2}{4}\left[\sqrt{\frac{ab}{pq}}+\left(\frac{a^2}{p}-\frac{b^2}{q}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)\right].$

95. $\left(\frac{2}{3}-\frac{8}{9}\right)abc$

96. $\left[\frac{2}{3}-\frac{8}{9}(4\sqrt{2}-5)\right]abc$

97. $\frac{12}{32}(2\pi+3\sqrt{3})(ab)^{3/2}.$

98. $\frac{\pi}{24}(5\sqrt{2}-4)\,abc$

99. $\frac{1}{3}\,abc.$

100. $\frac{k}{2k+4}\,abc$

101. $\frac{k}{2k+2}\,abc.$

102. $\frac{1}{8}\pi abc.$

103. $\frac{8}{35}.$

104. $\frac{\pi}{24}.$

105. $\frac{2}{3}\pi\,a$

106. $\frac{1}{560}\cdot\frac{(ab)^2}{c}$

107. $\frac{5\pi}{512}\frac{(ab)^{3/2}}{c}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right).$

108. $\frac{1}{5}\,abc.$

109. $\frac{5\pi}{384}(ab)^{3/2}.$

110. $\frac{1}{12}\cdot\frac{a^3hck}{h\,ak+bl}$

111. $\frac{1}{2}\pi abc.$

112. $\frac{3}{16}\pi^2abc.$

113. $\frac{3k}{4k+2}\pi abc.$

114. $\frac{45\pi}{16384}\left(\frac{ab}{h}\right)^2\sqrt[3]{abc}.$

115. $\frac{1}{24}\pi abc.$

116. $\frac{k}{6(k+2)}\,abc.$

117. $\frac{k}{6(k+1)}\,abc.$

118. $\frac{e^2-1}{e^2}(m-n)\,a^2$

119. $\frac{2}{27}(m^3-n^3)(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}).$

120. $\frac{\alpha^2\beta^2}{24}\frac{m^4-n^4}{c}$

121. $\frac{15}{32}\log 3\,\frac{a^4}{c}.$

122. $\frac{7}{3}\log\frac{3}{2}\,a^3.$

123. $\frac{1}{8}a^4\left(\frac{6}{p}+\frac{1}{q}\right).$

124. $\frac{1}{\pi}(\sqrt{2}+2)\log 2\,a^2c$

125. $\frac{5}{4}\cdot\frac{a^2b^2}{c}.$

126. $\frac{28}{27}(ab)^3.$

127. $\frac{14}{9}\log 3\,.\,a^3.$

128. $\frac{1}{2}\log 2\,\frac{a^4}{c}.$

129. $\frac{1}{12c^2}[(a^2-b^2)(m^2-n^2)+(m^2-n^2)(a^2-b^2)].$

130. $\frac{am(a+m)}{192c^2}[3a^2-5am+3m^2]$

131. $\frac{1}{6}Mh^2$

132. $\frac{1}{5}Mh^2.$

133. $\frac{8}{35}Mh^2$

134. $\frac{35}{36}Ma^2.$

135. $\left(\frac{3}{5}x_0,\ \frac{3}{8}\sqrt{2px_0}\right).$

136. $x_c = y_c = \frac{256}{315\pi} a.$

137. $x_c = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{8}{9\pi}\right) a, \quad y_c = \frac{5}{6} a.$

138. $x_c = \frac{2}{3} \frac{\sin\alpha}{\alpha} R, \quad y_c = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\cos\alpha}{\alpha}\right) R.$

139. $x_c = \frac{\pi a \sqrt{2}}{8}, \quad y_c = 0.$

140. $x_c = \frac{5}{6} a, \quad y_c = \frac{16}{9\pi} a.$

141. $x_c = y_c = \frac{4\pi\sqrt{3}}{27} a.$

142. $x_c = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \frac{a^3 b}{c^2}, \quad y_c = \frac{1}{4} \frac{a^2 b^2}{c^2}.$

143. $x_c = \frac{64}{147\pi} \frac{a^2 b}{c^2}, \quad y_c = \frac{33}{448} \frac{a^2 b^2}{c^2}.$

144. $\left(\frac{7}{12} a, \frac{35}{36} b\right).$

145. $x_c = \frac{3}{64} a, \quad y_c = \frac{3\pi}{64} b.$

146. $$\int_0^a \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy + \int_a^{2a} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$$

147. $$\int_0^a \int_{\frac{y^2}{4a}}^a f(x, y)\, dx\, dy + \int_a^{2a} \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\, dx\, dy + \int_a^{2a} \int_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x, y)\, dx\, dy$$

148. $$\int_{v=\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} \int_{u=0}^{\frac{\gamma}{\alpha}} f(\alpha u - \alpha v, \alpha v)\, u\, du\, dv$$

149. $$\frac{1}{\alpha} \int_{v=0}^{\frac{\alpha a+b}{\alpha}} \int_{u=0}^{\frac{1-v}{b}} f\left[\frac{u}{\alpha}(1-v), uv\right] u\, du\, dv +$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \int_{v=\frac{b}{\alpha a+b}}^{1} \int_{u=0}^{\frac{v}{\alpha}} f\left[\frac{u}{\alpha}(1-v), uv\right] u\, du\, dv.$$

150. $16a\sqrt{ap}$

151. $\frac{2}{3}(a + b)\sqrt{ab}$

152. $\frac{1}{3}\left(\alpha - 3\right) p^2 \left[\left(1 + \frac{a^2}{p^2}\right)^{3/2} - 1\right]$

153. $\frac{4}{3} p\sqrt{pq}\left[\left(1 + \frac{2a}{p}\right)^{3/2} - 1\right]$

154. $4c\left[b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos\frac{b}{a}\right]$

155. $8a^2 \arcsin\frac{b}{a}$

156. $2a\left[(2a - b) \arcsin\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{a(b - a)}\right]$

157. $2\pi a^2$

158. $\frac{1}{\sqrt{2}}\pi a^2$

159. π

160. $4a^2$

161. $\frac{\pi}{c}\left[R\sqrt{c^2 + R^2} + c^2 \log\frac{R + \sqrt{c^2 + R^2}}{c}\right]$

162. $\frac{2}{3}\pi a^2\left[\left(\frac{4c}{a} - 3\right)^{3/2} - 1\right].$

163. $2\pi a^2 (3 - \sqrt{3}).$

164. $\frac{\pi}{3} c^2 \sin^2\alpha \left[\left(1 + \frac{R^2}{c^2 \sin^2\alpha}\right)^{3/2} - 1\right]$

165. $\frac{\pi a}{2}\left[\sqrt{a^2 + 9c^2} + \frac{a^2}{3c} \log\frac{3c + \sqrt{a^2 + 9c^2}}{a}\right]$

166. $\frac{1}{9} a^2 (20 - 3\pi)$.

167. $\frac{1}{9} c^2 (20 - 3\pi)$.

168. $2\pi a^2 - 8a^2 (\sqrt{2} - 1)$.

169. $\sqrt{2}$.

170. $4\pi c \sqrt{ab}$

171. $\frac{a^2}{\sin\alpha \cos\alpha}$.

172. $\frac{4\pi}{\sqrt{6}}$

173. $\pi (2 - \sqrt{2})$.

174. $\frac{\pi}{4} \left[3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \log 2 + \sqrt{2} \log (\sqrt{3} + \sqrt{2})\right]$.

175. $\frac{\pi^2 a^2}{2}$.

176. $\frac{2}{3} \pi ab (2\sqrt{2} - 1)$

177. $\frac{4}{3} (2\sqrt{2} - 1) ab \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{b}}$.

178. $\frac{1}{9} (20 - 3\pi) ab$.

179. $\frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1) \pi R^2$.

180. $\frac{1}{12c^2 (a^2 + b^2)} [(a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2)^{3/2} - a^3b^3]$.

181. $2a^2$.

182. $\frac{1}{6} (a + b) \sqrt{2ab}$.

183. $\pi \log \left(e + \frac{1}{e}\right)$ (ввести координаты: $u = \operatorname{sh} x$, $v = \operatorname{sh} y$).

184. $\frac{1}{2} MR^2$.

185. $\frac{2}{3} MR^2$.

186. $\frac{55 + 9\sqrt{3}}{60} Mc^2$.

187. $\frac{1}{3} M (R^2 + H^2)(2R + H)$.

188. $\left(0, 0, \frac{2}{3} H\right)$.

189. $\left(0, 0, \frac{55 + 9\sqrt{3}}{130} c\right)$.

190. $\left(0, 0, \frac{R + H}{2}\right)$.

191. $x_c = y_c = \frac{26 - 15\sqrt{2}}{14}$, $z_c = \frac{61\sqrt{2} - 15 \log (1 + \sqrt{2})}{96 (\sqrt{2} + 1)}$.

192. $\frac{4}{5} \pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$.

193. При $n \neq 2$: $\frac{2\pi a}{c (n - 2)} \left[\frac{1}{(c - a)^{n-2}} - \frac{1}{(c + a)^{n-2}}\right]$, при $n = 2$: $\frac{2\pi a}{c} \log \frac{c + a}{c - a}$ (ввести координаты $x = a \sin u \cos v$, $y = a \sin u \sin v$).

194. $\frac{4}{3} \pi R^3 (\cos^4 \beta - \cos^4 \alpha)$.

195. $\frac{1}{3} \pi a^3$.

196. $\frac{1}{360} a^3$

197. $\frac{\pi}{60} a^3$.

198. $\frac{\pi^2}{4} a^3$.

199. $\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{8} a^3$.

200. $\frac{22}{315} a^3$

201. $\frac{1}{6} a^3$.

202. $\frac{64\pi}{105} a^3$.

203. $\frac{4\pi}{21} a^3$.

204. $\frac{5\sqrt{2}}{24} \pi a^3$

205. $\frac{\pi}{8} a^3$.

206. $\frac{1}{3} a^3$.

207. $\frac{4\pi}{9} (a^3 + b^3 + c^3)$.

208. $\frac{2}{3} \pi a^3$.

209. $\frac{1}{12} \pi a^3$.

210. $\frac{1}{6} \pi^2 a^3$.

211. $\frac{\pi^2}{12} a^3$.

212. $\frac{2}{3} a^3$.

213. $\frac{2}{27} \pi \sqrt{3} a^3$.

214. $\frac{4}{9}\pi^2 a^3$.

215. $\frac{\pi^2}{3n\sin\frac{\pi}{n}}\,a$.

216 $2\pi^2 R^2 a$.

217. $\frac{\pi}{24}(14+3\pi)\,a^3$

218. $\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{e}\right)a^3$.

219. $\frac{\pi ab}{48}(3a^4+3b^4+2a^2b^2)$.

220. $\frac{4}{3}\pi a^3$.

221 $\frac{2}{3}\pi^2 a^3$.

222. $\frac{\pi}{72}(5-3\sqrt{2})\,abc$.

223 $\frac{\pi}{3}\cdot\frac{a^2bc}{h}$.

224. $\frac{1}{360}\cdot\frac{a^4b^4c^4}{h}$.

225. $\frac{\pi^2}{4}\,\frac{abck}{\sqrt{c^2+k^2}}$

226. $\frac{4\pi}{21}\,\frac{abc^7}{h^6}$

227. $\frac{\pi}{12}\,\frac{a^3bc^2}{h^3}$.

228 $\frac{\pi}{12}abc\,\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}}\cdot\left(2\frac{a^4}{h^4}+\frac{a^2b^2}{h^2k^2}+2\frac{b^4}{k^4}\right)$.

229 $\frac{1}{6}\cdot\frac{(abc)^2}{h^4}$

230. $\frac{\pi}{5\sqrt{2}}\,\frac{abc}{\ldots}\cdot\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)$

231. $\frac{4\pi}{9}\cdot\frac{abc^3}{h^2}$

232. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{a^2bc}{h}$.

233 $\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{abc^2}{k}$

234. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}abc\sqrt{\frac{a}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}$.

235. $\frac{\pi}{192}\cdot\frac{abc^4}{l^3}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\left(5\frac{a^4}{h^4}-2\frac{a^2b^2}{h^2k^2}+5\frac{b^4}{k^4}\right)$.

236. $\frac{1}{3}\,\frac{abc^4}{l^3}\left[\frac{ab}{hk}+\left(\frac{a^3}{h^3}-\frac{b^3}{k^3}\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

237. $\frac{\pi^2}{96}\cdot\frac{abc^7}{l}\cdot\left[3\frac{a^4}{h^4}+2\frac{a^2b^2}{h^2k^2}+3\frac{a^4}{k^4}\right]$.

238. $\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi\cdot\frac{a^2b^2c^2}{h^3}$.

239. $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{27}\,\frac{abc^2}{l}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$

240. $\frac{\pi^2}{3n\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{abc^2}{h}$

241 $2\pi^2(1-\alpha)\,abc$

242. $\frac{8}{3}\pi(1-\alpha^2)^{3/2}\,abc$.

243. $\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{abc^3}{l}$.

244. $\frac{49}{864}a^3$.

245. $\frac{1}{60}\,\frac{abc^4}{l^3}$

246. $\frac{1}{60}abc\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$.

247 $\frac{1}{60}abc\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}$

248. $\frac{1}{60}\cdot\frac{abch(5c+4h)}{(c+h)^2}$.

249. $\frac{4}{105}abc\left(\frac{a}{h}\right)^3$

250. $\frac{2}{21}abc$.

251 $\frac{1}{108}\cdot\frac{abc^3}{h}$

252 $\frac{1}{168}abc\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^7\left(\frac{b}{k}\right)^7}{\frac{a}{h}-\frac{b}{k}}$.

253. $\frac{1}{168}abc\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^7+\left(\frac{b}{k}\right)^7}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}$.

254. $\frac{1}{360}\,\frac{(abc)^2}{h^3}$.

255. $\frac{1}{12}\cdot\frac{abc^4}{h^3}$.

256. $\frac{\pi}{64}abc\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$

257. $\frac{\pi}{64} abc \left(\frac{a}{h}\right)^4$

258. $\frac{4\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)^3}{243} \cdot \frac{abc}{h}$

259. $\frac{\pi}{3n \sin\frac{2\pi}{n}} abc \cdot \left(\frac{c}{h}\right)^3$

260. $\frac{1}{3\pi} abc$

261. $\frac{1}{3e} \cdot abc$

262. $\frac{1}{12} abc$

263. $\frac{1}{3} abc.$

264. $\frac{\pi}{6} ch\left(ab\right).$

265. $\frac{4\pi}{35} abc.$

266. $\frac{\pi}{448} \frac{abc^4}{h^3}$

267. $\frac{21\pi^2}{1024} abc$

268. $\frac{\pi}{80} \frac{abc^4}{h}$

269. $\frac{1}{90} abc$

270. $\frac{1}{18} abc.$

271. $\frac{1}{270} abc\left(\sqrt{\frac{a}{h}} + \sqrt{\frac{b}{k}}\right)$

272. $\frac{1}{630} \frac{abc^2}{h}$

273. $\frac{1}{1080} abc.$

274. $\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

275. $\frac{2h}{|\Delta|}$ (см. зад. 274).

276. $\frac{4\pi}{3|\Delta|}$ (см. зад. 274).

277. $\frac{4}{3|\Delta|}$ (см. зад. 274).

278. $\frac{1}{3} M(a^2 + b^2)$

279. $\frac{3}{2} MR^2$

280. $\frac{1}{9} Ma^2$

281. $\frac{1}{2} Ma$

282. $10M$

283. $\frac{57}{140} Ma.$

284. $\frac{1}{5} M(a^2 + b^2).$

285. $\frac{1}{10} M(a^2 + b^2)$

286. $\frac{7}{113} M(a^2 + b^2)$

287. $\left(\frac{3}{5} a, \frac{3}{5} b, \frac{9}{32}\left(a^2 + b^2\right)\right).$

288. $\left(\frac{1}{3} a, \frac{1}{3} b, \frac{2}{9} c\right)$

289. $\left(0, 0, \frac{3}{4} H\right).$

290. $\left(0, 0, \frac{1}{2} a\right)$

291. $\left(0, 0, \frac{2}{3} a\right)$

292. $\left(\frac{-a}{4\sqrt{2}}, \frac{-a}{4\sqrt{2}}, \frac{5a}{4\sqrt{2}}\right)$

293. $\left(\frac{9\pi a}{8(3\pi - 4)}, 0, 0\right)$

294. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$

295. $\left(0, 0, \frac{3}{8}(1 + \cos\alpha) a\right).$

296. $x_c = y_c = z_c = \frac{91}{448} a.$

297. $\left(0, 0, \frac{9}{20} a\right)$

298. $\left(0, 0, \frac{5(6\sqrt{3} + 5\pi)}{8\pi} c\right)$

299. $\left(0, 0, \frac{3}{16}(2 + \sqrt{2}) c\right)$

300. $\left(\frac{1}{4} a, \frac{1}{4} b, \frac{1}{4} c\right).$

301. $\left(0, 0, \frac{7}{30} c\right)$

302. $\left(\frac{21}{128} a, \frac{21}{128} b, \frac{21}{128} c\right)$

303. $\left(\frac{3}{28} a, \frac{3}{28} b, \frac{3}{28} c\right)$

ОТДѢЛЪ IX

1. $z = x^2 \cos y + y^2 \cos x + c.$

2. $z = c + (x+1)y + \cos x.$

3. $z = \frac{e^y - 1}{1 + x^2} + c$

4. $z = c + \log(x+y) - \frac{y}{x+y}.$

5. $z = \frac{x-y}{(x+y)^2} + c.$

6. $z = c + xy + \sqrt{x^2+y^2}.$

7. $u = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + c$ при $n = 1.$

9. $a = b = -1;\ z = \frac{x-y}{x^2+y^2}.$

9. $v = c + \frac{x-3y}{z}.$

10. $v = c + \frac{1}{2}\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2}$

11. $a = 1;\ b = 1;\ c = 2,\ a' = \frac{1}{2};\ b' = \frac{1}{2};\ c' = \frac{3}{2};\ v = c + \frac{2x+2y+3z}{2(x+y+z)^2}.$

12. Условіе необходимое и достаточное для существованія функцій P и Q, удовлетворяющихъ данной системѣ: $\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial\sqrt{B}}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\frac{\partial\sqrt{A}}{\partial y}\right)}{\partial y} = 0.$

13. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$

14. $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = C.$

15. $x^2 + y^2 + \frac{y}{x} = C$

16. $x^2 + y^2 + 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C.$

17. $\frac{y}{x} = \cot(C - \sqrt{1+x^2+y^2}).$

18. $x + ye^y = C.$

19. $x^3 - y^3 = Cy^2$

20. $\frac{xy}{x-y} + \log\frac{x}{y} = C.$

21. $2(x^3 - y^3) + 3(x^2 - y^2) = C.$

22. $y = e^{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$

23. $y - 2\log(1+e^x) = C$

24. $y = \operatorname{atg}\left(C - \frac{\sqrt{ax - x^2}}{x}\right).$

26. $(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2$

28. $x^{-2} + y^{-2} - 2\log\left(\frac{Cx}{y}\right).$

27. $y = Ce^{xy}.$

28. $\log(xy) + x - y = C.$

29. $x = Cye^{xy}$

30. $\operatorname{tg}\left(\frac{u}{4} + \frac{u-v}{2}\right) = u + C.$

31. $y = \frac{x}{x-1} + Cx.$

32. $y = Ce^{x^3} - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}$

33. $y = e^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right).$

34. $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}(C + x).$

35. $y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m+a}.$

36. $y = (x+1)^n(e^x + C)$

37. $y = Ce^{\sin x} + \sin x - 1$

38. $y = x\log x + \frac{c}{x}.$

39. $y = x^3(1 + ce^x).$

40. $y = ax^2 + Cx \sqrt{1 - x^2}$

41. $y^2 = Ce^{ax} - \frac{x+1}{a} - \frac{1}{a^2}$

42. $e^y = \frac{x^4}{2} + cx^2$

43. $e^{-2y} = ce^{-2x} - \frac{2}{3} e^x$

44. $e^y (1 + Cx) = 1$.

46. $\sin y = x - 1 + Ce^{-x}$.

46. $x = y^2 (C - \log y)$.

47. $x = Ce^{-y} - y^2 + 2y - 2$.

48. $y^2 - 2x = Cy^2$

43. $x^2 - y^4 - Cy^2 = 0$.

50. $x^2 + y^2 - 2y = Ce^{-x}$.

51. $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C$

52. $y = x + \sqrt{1 - x^2}$

53. $y = x^3 - \frac{1}{2} x (x^3 + 1)$.

34. $y = 1$.

55. Одна асимптота $x = 0$, другая проходитъ черезъ точку $(2a, 0)$.

56. $\frac{1}{y} = C \sqrt{1 - x^2} - a$.

57. $2x^3y^3 = 3a^2x^2 + C$

58. $my^n = Ce^{-\frac{nx}{a}} + nx - a$

59. $(1 + Cx + \log x) y = 1$

60. $y^2 (Ce^{x^2} + 1) = 1$

61. $y^3 (3 + Ce^{\cos x}) = 1$.

62. $y = \left(Ce^{x^2} - \frac{x^3 + 2}{9}\right)^3$

58. $y = \left(\frac{C + \log \cos x}{x} + tg\, x\right)^2$

64. $\frac{2}{y^n} = a (1 + 2x^3) - Ce^{2x^2}$.

65. $y = \left[C \sqrt[4]{1 - x^2} - \frac{1}{3} (1 - x^2)\right]^2$, $y = 0$.

66. $y^2 = Ce^{-\frac{2a}{x}} + \frac{b}{2a^2} \left(1 - \frac{2a}{x}\right)$

67. $\frac{1}{x} = \sqrt{y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}}$

68. $\frac{1}{1 - xy} + \frac{1}{2} \log x = C$.

69. $xy = \frac{1 + cx^2}{1 - cx^2}$.

70. $tg \frac{y}{2} = ce^{-x} - x + 1$

71. $tg \frac{y}{2} = \frac{1}{cx} - x^2$.

72. $\varphi (x) = Cx^{-\frac{n}{n-1}}$.

73. $x^2y = Ce^{-\frac{n}{x^2}}$.

74. $y = 2 - (2 + a^2) e^{\frac{x^2 - a^2}{2}}$

75. $y^2 = 1 - (2a + 1) e^{x - a}$.

76. $y = \sqrt{x} \left(\frac{1}{3} x - 1\right)$.

77. $(x + y)^2 (2x + y)^3 = C$

78. $arctg \frac{y}{x} = \log (C \sqrt{x^2 + y^2})$.

79. $y^2 = C (y^2 - x^2)$.

80. $x^2 + y^2 = C (x + y)$.

81. $x^3 + 3x^2y - y^3 = C$.

82. $\log y + \frac{x}{y} = C$.

53. $y (y - 2x)^3 = C (y - x)^2$.

84. $\frac{2x}{x - y} + \log \{(y + x) (y - x)^3\} = C$.

85. $ye^{\frac{y}{x}} = C$

53. $x = Ce^{arctg \frac{y}{x}}$.

87. $3x^4 + 8x^3y + 6x^2y^2 = C$

88. $y = x \sqrt{C + 2 \log x}$

89. $x^2 + y^2 = Cy$.

90. $x^2 = C^2 + 2Cy$.

91. $y = \frac{Cx^2}{2} + \frac{1}{2C}$

02. $x^2 = C (y + \sqrt{x^2 + y^2})$.

93. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \log y = C$.

94. $y^2 = C^2 - 2Cx$.

95. $\log \frac{y}{x} = Cx$.

96. $\log x = \frac{xe^{\frac{y}{x}}}{x + y} + C$.

97. $y = xe^{1 + Cx}$.

98. $\left.\begin{array}{l} y = x (1 - x)^2 + x \\ y = x \end{array}\right\}$.

99. $(x + y - 1)^3 = C (x - y + 3)$.

100. $x + 2y + 3\log(2 - x - y) = C$. **101.** $x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y = C$.

102. $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$. **103.** $abx + b^2y + a + bc = Ce^{bx}$.

104. 1. $ab > 0$: $ax + by + C = \sqrt{\frac{a}{b}}\, tg(x\sqrt{ab} + C)$.

2. $ab < 0$; $ax + by + C = \sqrt{-\frac{a}{b}}\, th(x\sqrt{-ab} + C)$.

105. $2\sqrt{ax + by + c} - \frac{2a}{b}\log(a + b\sqrt{ax + by + c}) = b(x + C)$.

106. $x + y = a\, tg(C + ay)$. **107.** $y = x - \frac{1}{x + C}$.

109. $y = \frac{1 + \log x - C}{Cx - x\log x}$. **110.** $y = -\frac{1}{4x} - \frac{1}{Cx + x\log x}$.

111. $y = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{Cx + x\log x}$. **112.** $xy = 2 + \frac{4}{\log Cx}$.

113. $\frac{1}{xy^2} = \sin\log\left(\frac{x}{C}\right)$, $xy^2 = \pm 1$.

114. $x^2 + y^2 = C(x - 1)^2$. **115.** $x + 2y + ax(x + y) = C(x + y)^2$.

116. $y = \frac{x}{c\sqrt{x - 1}}$. **117.** $y^2 - 1 + 2Cxy = 0$.

118. $x^2 + y^2 = Cy^2e^{2x}$. **119.** $y = x + y^2)e^{\frac{x}{y}} = Cy$.

120. $x^2 + y^2 + \frac{1}{xy} = C$. **121.** $x + a\log\frac{x + y}{x} = C$.

122. $x + arctg\frac{x}{y} = C$. **123.** $x^3 + x = Cy$.

124. $\frac{x + y}{y} = Ce^{(x + y)/a}$.

125. $(3x + 2y + 1)(4x + 3y + 2) = C(x + y + 1)^2$.

126. $(1 + x - y)(1 + 2x + 3y) = C(1 + x + y)^2$.

127. $y(x + y) = \frac{C}{2} + x + y + A(x + y)^2$.

128. $x - y + 1 + xy + \frac{1}{2}y^2 = C(1 + x)^2$.

129. $x + \frac{y}{x} = C$. **130.** $\frac{y}{x} + \frac{1}{3}\frac{y^3}{x^3} - ax - \frac{x^2}{2} = C$.

131. $y^2 - 2xy - \frac{2}{x} = C$. **132.** $y^3 - \frac{y}{x^2} + x\log x = C$.

133. $(x^2 + y^2)e^x = C$. **134.** $xy + y^2 = 1 + Ce^x$.

135. $x\sin y + y\cos y - \sin y = Ce^{-x}$. **136.** $x^2 + \frac{2x}{y} = C$.

137. $x^2 - \frac{x}{y} + y + \log y = C$. **138.** $\frac{x}{y} + \cos x - tg\, y = C$.

139. $x^3 + xy + y^3 = C(x + y)$. **140.** $\frac{xy + x + y}{(x + y)(x + y + 2)} = C$.

141. $x^2 + y^2 + \frac{1}{xy} = C$. **142.** $xy - \log y = C$.

143. $\frac{x^2y^2}{2} + \log\frac{x}{y} = C$. **144.** $y^2 - x^2 - Cx + 1 = 0$.

145. $x^2 + y^2 = C(y - 1)^2$.

146. Есть интегрирующий множитель вида $\varphi(x^2 + y^2)$.

147. $\mu = \frac{1}{(x^2 + y^2)^3}$; $C(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$.

148. $y^2 - x^3y + \frac{x^4 + x^3y}{x^3 + y} = C$. **149.** $\frac{2b + c(x + y)}{cxy - a} = C$.

150. $a + b(x + y) + cxy = \Gamma(x - y)$, где Γ произвольная постоянная.

151. $2\Gamma^2(x - y)^2 - 2\Gamma(2cxy + b(x + y) + 2a) + b^2 - 4ac = 0$, Γ - произв. пост.

152. $x\sqrt{a+bx+cx^2}+y\sqrt{a+by+cy^2}=(x-y)\sqrt{C+b(x+y)+c(x+y)^2}$

158. $\cos\theta\cos\theta_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

159. $\left(y-\frac{1}{2}x^2-C\right)(y+x-1-Ce^{-x})=0$.

160. $y=\frac{x}{2}\left(Ce^x+\frac{1}{Ce^x}\right)$.

161 Общій интегралъ $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{c}{p^2}\pm\frac{a\sqrt{1+p^2}}{2cp}+\frac{a}{2p^2}\log(p+\sqrt{1+p^2}) \\ y=\frac{c}{p}\pm\frac{a}{p}\log(p+\sqrt{1+p^2}) \end{array}\right\}$.

162. $\left(y-\frac{x^3}{3}-C\right)(y-Ce^{x^2})\left(y-\frac{1}{C-x}\right)=0$.

163. $y=x\,tg\left(C-\frac{y^2}{2}\right)$.

164. Общій интегралъ $y=Cx+\sqrt{1+C^2}$. Особенное рѣшеніе $y^2+x^2=1$

165. Общій интегралъ $\sqrt{16y+4x^2+x^2}+x\sqrt{1+x^2}+\log(x+\sqrt{1+x^2})+C$. Особенное рѣшеніе $16y+4x^2+x^4=C$.

166 $(x-c)^2+(y-c)^2=c^2$.

167 $x^3y^2-C(xy(1+x)+C^2=0$

168. $x^2(x^2-3y^2)^2-2Cy(y^2-3x^2)+C^2=0$.

169. $x^3y^2-2Cx^4y\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)+C^2=0$.

170. $x=Ce^{\theta}+e^{-\theta}\operatorname{ch}\theta$, $y=2C\operatorname{ch}\theta\,e^{\theta}+e^{-\theta}\operatorname{ch}\theta$.

171. $2y=Cx^{\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{k-1}{k}}}-\frac{k}{C}x^{\frac{1}{k}-\sqrt{\frac{k-1}{k}}}$.

172. $(y-c)^3-3x^2(y-c)+x^3=0$.

173. $\frac{y-c}{x}=e^{\frac{y-c}{x}}\sin\frac{y-c}{x}$.

174 $x=c+2p+3p^2$, $y=p^2+2p^3$, $y=0$ — особ. рѣшеніе

175. $y=x-c-\frac{1}{x-c}$; $y=-2a$ — ос. рѣш.

176 $y=a\operatorname{ch}\frac{x+c}{a}$; $y=a$ — особ. рѣшеніе

177 $x+c=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}-\log\frac{1+\sqrt{1+p^2}}{p}$, $y=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$, $y=0$ — особ. рѣш.

178. $y=(\sqrt{c+2x}-1)e^{\sqrt{2x+c}-1}$.

179. $y=x-c-\frac{(x-c)^3}{27}$; $y=\pm2$ — ос. рѣш.

180. $y=3\,tg(x+c)+3\,tg^3(x+c)$.

181. $y+c=\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1})$.

182. $y+c=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$.

183. $x^{\frac{2}{3}}+(y+c)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

184. $x=ap+bp^2$, $y=c+\frac{1}{2}ap^2+\frac{2}{3}bp^3$.

185 $(x-1)^2=\frac{64}{27}(y-c)^3$.

186. $x=\frac{1+t}{t^3}$, $y=c+\frac{3}{2t^2}+\frac{2}{t}$

187. $x^2+(y-c)^2=a^2$.

188. Общій интегралъ $2y=x^2\pm x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})+c$

189. $225(y+c)^2+4(x-1)^3(3x+2)^2=0$.

190 $x=\frac{at}{\sqrt{1+t^2}}$, $y+c=\frac{a^2}{6}\frac{4t^2+1}{(1+t^2)^2}$.

191 Общій интегралъ $(x-y-c+1)(x-y-c-3)+4x=0$.

192. $(y+c)^3=\frac{bx^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)^2$.

193. $(y+2x+c)^2+4x-4=0$.

194. $x^2+y^2=2cx$.

195. $y=cx+c-c^2$, $4y=(x+1)^2$ особ. рѣшеніе.

196. $y^2=2cx+c^2$; $2y^4+32x^2=0$ — особ. рѣшеніе.

197. Общій интегралъ $2(x-c)^3+3(y-c)^2=0$. Особенное рѣшеніе $y=x=\frac{2}{3}$.

198. Общій интегралъ $y(c-x)=c^2$. Особенное рѣшеніе $y=4x$.

190. Общій интегралъ $y = \frac{(c-x)^2}{c}$. Особенныя рѣшенія $y = 0$ и $y = 4x$.

200. Особенное рѣшеніе $(2x-b)^2 + 4ay^2 = 0$.
Общій интегралъ $y^2 = C(2x-b) + aC^2$.

201. Общій интегралъ $y = cx^2 + \frac{1}{c}$. Особенное рѣшеніе $y = \pm 2x$.

202. Общій интегралъ $x = cy + c^2$. Особенное рѣшеніе $y^2 + 4x = 0$.

203. $y = [\frac{1}{2}x + 1 + c]^2$; $y = 0$ — ос. рѣш. **204.** $(x - C)^2 + y^2 = (aC)^2$

205. $x = \frac{C}{t^2} + \frac{2}{3}t$; $y = \frac{2C}{t} + \frac{1}{3}t^2$.

206. $x = ce^{-t} - 2(1+t)$; $y = x(1+t) + t^2$

207. $y^2 = 2Cx + C^2$

208. Общій интегралъ $y = Cx + C^2$.
Особенное рѣшеніе $x^2 + 4y = 0$.

209. Общій интегралъ $y = Cx - a\sqrt{1+C^2}$.
Особенное рѣшеніе $x^2 + y^2 = a^2$.

210. $x = \frac{C + \log t}{t^c}$, $y = 2xt + \frac{1}{t}$

211. $x = \frac{C}{\sqrt{1+t^2}}\left\{\sqrt{1+t^2} - t\right\}^a$; $y = (t + a\sqrt{1+t^2})x$.

212. $x = \frac{C}{t^2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2t^2}\log(t + \sqrt{1+t^2})$, $y = 2xt + \sqrt{1+t^2}$.

213. $x = \frac{Ce^{\operatorname{arctg} t}}{1+t^2}$, $y = \frac{Ce^{\operatorname{arctg} t}(1+t+t^2)}{1+t^2}$.

214. $x = \frac{C(p^2-p+1)e^{-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} p}}{\sqrt[4]{(p-1)^2(p^2+1)^3}}$, **215.** $x = \sin t\left[a - C - \frac{1}{2}a\sin^2 t\right]$.

$y = \frac{Ce^{-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} p}}{\sqrt[4]{(p-1)^2(p^2+1)^3}}$. $y = \cos t\left[C + \frac{1}{2}a\sin^2 t\right]$.

216. Общій интегралъ $y = Cx + \frac{x^2}{C}$. Особенное рѣшеніе $y^2 = 4x^2$.

217. Общій интегралъ $\begin{cases} x = \frac{a\cos^2 t}{\sqrt{C-t}} \\ y = \frac{a(2C - 2t + \sin t\cos t)}{\sqrt{C-t}} \end{cases}$.

218. $y = xt - x^{-m}e^t$, $x = e^{\frac{t}{m}}\left\{C + (m+1)e^{\frac{t}{m}}\right\}^{-\frac{1}{m+1}}$.

219. $y^2 + Cx^2 = C^2$, $y = \pm\frac{Cx^2}{2}$.

228. Общій интегралъ $x = Ce^{-\frac{\varphi}{2}}\cos\varphi$, $y = \frac{C^2}{4}e^{-\varphi}(2 + \sin 2\varphi)$.

221. Общій интегралъ $2y = C^2 + 2Cx - x^2$.

222. Общій интегралъ. $x = Ce^{-\varphi}\cos\varphi$, $y = \frac{C^2}{4}e^{-2\varphi}(1 + \sin 2\varphi)$.

223. $x = \frac{C}{\sqrt[3]{\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-2)^4}}$; $y = \frac{C^2(t^2-1)}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2(t-2)^3}}$.

224. $x = Ce^{-\varphi}(1+\varphi)$, $y = \frac{C^2}{4}e^{-2\varphi}(1 + 2\varphi + 2\varphi^2)$.

225. $4y = (x+1)^2$.

226. $4y + x^3 = 0$.

227. $y = \frac{x^5}{4}$.

228. $y = x$.

220. $xy = 1.$

230. $\left(\frac{x}{a}\right)^{1/2} + \left(\frac{y}{b}\right)^{1/2} = 1.$

231. $y = \frac{x^3}{27}.$

232. $y = 2e^{\frac{1}{2}\frac{1}{x}}.$

233. $b^2y^2 = a^2x^2 - a^2b^2.$

234. $y = \frac{x^4}{16}.$

235. $y^2 + 2ax = 0.$

236. $16y + 4x^2 + x^4 = 0.$

237. $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C + C_1x.$

238. $y = \log \sin x + C + C_1x + C_2x^2.$

239. $y = (1 + C^2)\log(x + C) - Cx + C_1.$

240. $y = (Cx + C^2)e^{\frac{x}{C}+1} + C_1.$

241. $x = a \sin \varphi + C \cos \varphi,$

$y = C_1 + \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} + C \sin \varphi - C \log \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi}.$

242. $y = \frac{1}{12}(x - C)^3 + C_1.$

243. $y = Cx(x - C) + C_1.$

244. $(x - C_1)^2 + (y - C_1)^2 = a^2.$

245. $(x - C_1)^2 + (y - C_1)^2 = 1.$

248. $x = C - a \log \sin \frac{y - C_1}{a}.$

247. $y = Ce^{\frac{x}{C}} + C_1x + C_2.$

248. $y = \frac{1}{3}(C - 2x)^{3/2} + C_2x + C_3.$

249. $y = (x + C_1)\log(C_1x + C_2C_1) - x + C_3.$

250. $x = C_1y^2 + C_2y + C_3.$

251. Общий интеграль $x^2 + y^2 + Cx + C_1y + C_2 = 0.$ Особенное рѣшение $y = Cx + C_1.$

252. $y = C_1(3x + C_2)^{2/3}.$

253. $\sqrt{C + \frac{2a}{b}y} = C + \frac{4a}{C_1}x.$

254. $y = 2a(C \sin^2 t),\quad x = C_1 + C\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right).$

255. $x + C_1 = \frac{1}{\sqrt{C}}\log\frac{\sqrt{C + 2ae^y} - \sqrt{C}}{\sqrt{C + 2ae^y} + \sqrt{C}}.$

256. $x = \frac{2}{3}\sqrt{y - 2C}\sqrt{y + C} + C_1.$

257. $y = Ce^{C_1x}.$

258. $(x + C_1)^2 + y^2 = C_1^2.$

269. $y \cos^2(x + C) = C_1.$

260. $(x - C_1)^2 = 4C(y - C).$

261. $y = \frac{C}{\cos^2 t};\ x = C_1 + 2t - \operatorname{tg} t.$

262. $y^2 = C_1 + \frac{1}{2}C_2e^{2x} + \frac{C_1^2 - 1}{2C_2}e^{-2x}.$

286. $(C_1y - 1)^{3/2} = \frac{3}{2}C_1x + C_2.$

264. $C_1x + C_2 = \frac{1}{1 - \lg y}.$

265. $y = C_1e^{C_2x} + C_2e^{-C_2x}.$

266. $y = \frac{C + x}{C_1 + x}.$

267. $x = C + C_1\log(y + \sqrt{y^2 + 1 - C_1^2}) + \log(y - C\sqrt{y^2 + 1 - C^2}).$

268. Общий интеграль $y = C + C_1e^{Cx}$. Особенное рѣшение $(C - x)y = 4.$

269. $y^2 + x^2 = 2x.$

270. $y = Ce^x + C_1e^{-x} - x$ или $y = C\cos x + C_1\sin x - x.$

271. $y = x\left(C - \arcsin\frac{C_1}{x}\right).$

272. $y = x\log\left(\frac{C_1x}{1 + C_1x}\right).$

273. $y^2 = C_1 + C(x^2 + x\sqrt{1 + x^2} + \log(x + \sqrt{1 + x^2})).$

274. $y = x^2\{1 + C\operatorname{tg}(C\log C_1x)\}.$

275. $y = \frac{Cx}{C_1 + x^2}.$

276. $y = C_1xe^x.$

277. $y = C_1e^{2x} + \frac{x}{2C}.$

278. $y^2 - 2Axy - x^2 - B.$

279. $y = C_1\sqrt{x^2 + C}.$

280. $2xy\cos C_1 - (x^2 - y^2)\sin C_1 = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{C}\sqrt{2C(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 - a^2)^2}.$

281. $z = C_1(x^2+y^2)\log(x^2+y^2) + C_2\log(x^2+y^2) + C_3(x^2+y^2) + C_4.$

282. $\varphi = \frac{1}{a}\log\left\{x^2+y^2 - \frac{2}{a^2} + \sqrt{\left(x^2+y^2-\frac{2}{a^2}\right)^2 - \frac{4}{a^4}}\right\} + b,$

где a и b постоянныя произвольныя.

283. $y = C_1\log x + C_2.$

284. $y = Cx + \frac{Cx^3}{3} + C_1.$

285. $y = \frac{2}{3}Cx^{3/2} - \frac{mx^2}{2} + C_1.$

286. $y = \frac{3x^2}{4} + x + C_1\log x + C_2.$

287. $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} + C_3e^{-3x}.$

288. $y = e^{-\frac{x}{2}}\left\{(C_1+C_2x)\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + (C_3+C_4x)\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right\} + x^2 - 3x + 1.$

299. $y = e^{3x}\left(C_1 + C_2x + \frac{1}{x} + (9x - 6)\log x\right).$

290. $y = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{2x} - x - 4.$

291. $y = \frac{1}{a^2+1} + C_1\cos ax + C_2\sin ax.$

292. $y = (C_1 + C_2x - 3x^2 + 2x^3)e^{2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x.$

293. $y = C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x + C_4x^2 - 2x^3 + x^4)e^x.$

294. $y = C_1e^x + (C_2 + x)e^{2x} + (C_3 + 21x - 9x^2 + 2x^3)e^{3x}.$

295. $y = C_1e^{6x} + C_2e^x + \frac{9\sin x + 7\cos x}{74}.$

296. $y = (C_1 + C_2x)(C_3\cos ax + C_4\sin ax) - \frac{x^2}{a^2}\cos ax.$

297. $y = (C_1 - \sin ax)e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3\cos ax + C_4\sin ax.$

298. $y = (C_1 + C_2x + 4x\sin x - (x^2-6)\cos x)e^{-x}.$

299. $y = C_1e^x + C_2xe^x + 2x^2e^x + \frac{3\sin x + 4\cos x}{25} - e^{-x}.$

300. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{4}x\sin x + \frac{1}{16}\cos 3x.$

301. $y = e^{-x}(C_1 + C_2x) + \cos 2x\{C_3 + 0{,}0187x - 0{,}02x^2\} +$
$+ \sin 2x\{C_4 + 0{,}0084x - 0{,}015x^2\}.$

302. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \sqrt{\cos 2x}$

353. $y = e^{-x}(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_{n-1}x^{n-1}).$

304. I. n — четное. $y = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left(A_k\cos\left(x\sin\frac{2k\pi}{n+1}\right) + B_k\sin\left(x\sin\frac{2k\pi}{n+1}\right)\right)e^{x\cos\frac{2k\pi}{n+1}}.$

II. n — нечетное: $y = Ce^{-x} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(A_k\cos\left(x\sin\frac{2k\pi}{n+1}\right) +\right.$
$\left. + B_k\sin\left(x\sin\frac{2k\pi}{n+1}\right)\right)e^{x\cos\frac{2k\pi}{n+1}}.$

505. I. n — нечетное. $y = Ce^x + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}e^{x\cos\frac{2k\pi}{n}}\left(A_k\cos\left(x\sin\frac{2k\pi}{n}\right) +\right.$
$\left. + B_k\sin\left(x\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right).$

II. n — четное: $y = Ce^x + C_1e^{-x} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}e^{x\cos\frac{2k\pi}{n}}\left(A_k\cos\left(x\sin\frac{2k\pi}{n}\right) +\right.$
$\left. + B_k\sin\left(x\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right).$

306. $y = \frac{a + ky_0}{2k} e^{k(x - x_0)} + \frac{ky_0 - a}{2k} e^{-k(x - x_0)}$.

307. $y = y_0 \cos k(x - x_0) + \frac{a}{k} \sin k(x - x_0)$.

308. $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{\pi}{2} + x \cos x$, откуда искомое рѣшеніе

$y = \pi \sin^2 \frac{x}{2} - \sin x + x \cos x$.

309. $xy = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

310. $y = C_1 e^x + C_2 x^2$.

311. $y = C_1 \log x + C_2 x$.

312. $y = C_1 (1 + x) + C_2 e^x$.

313. $y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x$.

314. $y = e^{nx^2} (C_1 + C_2 x)$.

315. $y = Ce^{-x^2} + C_1 (x^2 + 1)$.

316. $y = C(1x^3 - 3x) + C_1 \sqrt{1 - x^2}(4x^2 - 1)$.

317. $y = Ce^x (x^2 - 8x + 20) + C_1 (x^3 + 9x^2 + 36x + 60)$.

318. $y = C(x^3 - x) + C_1 \left(3x^2 - 1 - \frac{3}{4}(x^3 - x) \log \frac{x + 1}{x - 1}\right)$.

319. $y = C(3x^2 - 1) + C_1 \left(6x - (3x^2 - 1) \log \frac{1 + x}{1 - x}\right)$.

320. $y = C(2x^2 - 1) + C_1 \left\{(2x^2 - 1) \int e^{x^2} dx - xe^{x^2}\right\}$.

321. $y = C(x^2 - 4x + 2) + C_1 \left\{(x - 3) e^x - \int \frac{e^x}{x} dx\right\}$.

322. $y = C \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} + C_1 \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$.

323. $y = \frac{C_1}{x^2} + C_2 (2x - 3)$.

324. $y = \frac{C_1 + C_2 x^2}{x - 1}$.

325. $y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x - 1}$.

326. $y = \frac{C_1 x}{x + 1} + C_2 x^2$.

327. $y = \frac{C_1 + C_2 x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

328. $y = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}$.

329. $y = (C_1 + C_2 e^x) e^{e^x}$.

330. $y = C \cos e^x + C_1 \sin e^x$.

331. $y = C_1 \cos \left(\frac{n}{x}\right) + C_2 \sin \left(\frac{n}{x}\right)$.

332. $y = Cx + C_1 \sqrt{1 - x^2}$.

333. $C_1 \sin^4 x + \frac{C_2 \cos x}{\sin^3 x} \left\{\sin^4 x + \frac{3}{5} \sin^2 x \cos^4 x + \frac{1}{5} \cos^6 x\right\}$.

334. $y = \frac{C_1 x}{1 - x} + C_2 \left\{x + 1 + \frac{2x \log x}{1 - x}\right\}$.

335. Положивъ $u = x^2 y'' - 2xy' + 2y$, приходимъ къ уравненію $u' = x^2 (Pu + Q)$.

336. $y = C + C_1 \log x + C_2 x^2$.

337. $y = x(C_1 + C_2 \log x + C_3 (\log x)^2)$.

338. $y = C_1 x^{\frac{3 + \sqrt{32 + 5}}{2}} + C_2 x^{\frac{3 - \sqrt{32 + 5}}{2}} +$

$+ x^{\frac{3}{2}} \left\{C_3 \cos \left(\frac{\sqrt{\sqrt{32} - 5}}{2} \log x\right) + C_4 \sin \left(\frac{\sqrt{\sqrt{32} - 5}}{2} \log x\right)\right\}$,

339. $y = \frac{1}{2} x + C_1 \cos (\log x) + C_2 \sin (\log x)$.

340. $y = x(C_1 + C_2 \log x + \log^2 x)$.

341. $y = x \log x + C_1 x + C_2 x^2 + x^3$.

342. $y = x(C_1 + C_2 \log x) + C_3 x^2 + \frac{x^3}{4} - \frac{3}{2} x (\log x)^2$.

343. $y = C_1 - 3x + C_2 (2x + 2)^{-\frac{4}{3}} + 5 \log (3x + 2)$.

344. $y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{1}{2} ax + \frac{1}{12} bx$.

345. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3 x \log x + \frac{C_4}{x} \log x + \frac{x^2}{9}$.

346. $y = \frac{C_1 + C_2 \log x + \log^2 x}{x}$.

347. $y = \frac{2 \log^2 x + \log x + C_1 + C_2 x^4}{x}$.

348. $y = C_1 \cos \log (1 + x) + C_2 \sin \log (1 + x) + \log (1 + x) \cos \log (1 + x)$.

349. $x^2 + y^2 = C_1$; $p^2 + q^2 = C_1$; $py - qx = C_2$.

350. $\frac{z}{y} = C_1$; $\frac{(x^2+y^2)y}{x^3} = C_2$. **351.** $y = \frac{C_2 - x}{\sqrt{C_1 - 2x}}$, $z = \frac{C_2 - C_1 + x}{\sqrt{C_1 - 2x}}$

352. $\log\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = C_1$, $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = C_2$.

353. Интегралы системы: $(y-x)z = C_1$; $(y-x)e^{2(y-x)} = C_2$.

354. $x+y+z = C_1$, $x^2+y^2+z^2 = C_2$.

355 $\frac{x}{y} = C_1$; $z + \sqrt{x^2+y^2} + z^2 = C_2$.

356. $x^2+y^2 = C_1$; $(x+y)(x+y+z) = C_2$.

357. $y^2+x^2+z^2 = C_1 y$, $z = C_2 y$.

358. $x-y = C_1$, $z - t(x-y+1) = C_2$; $y - \log(z-t) = C_3$.

359. $z - x = y$, $y(y-2x)^2 = (x-y)^2$

360. $x = -s\sin\alpha + \frac{ds}{d\alpha}\cos\alpha$;

$y = -s\cos\alpha + \frac{ds}{d\alpha}\sin\alpha$,

$s = e^{\frac{\alpha}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)$

361. $x + C_1 = -\frac{a^2}{b}\sin\frac{bt+C}{a}$.

$y + C_2 = -\frac{a^2}{b}\cos\frac{bt+C}{a}$.

362. $y = (C_1 + C_2 - C_1 x)e^{-2x}$.

$z = (C_1 x - C_2)e^{-2x}$.

363. $x = e^{-6t}(A\cos t + B\sin t)$.

$y = e^{-6t}((B+A)\cos t + (B-A)\sin t)$.

364. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}$, $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - C_3 e^{-2t}$; $z = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}$.

365. $x = -(C_1+C_2)e^{-t} + \frac{1}{3}C_0 e^{2t}$, $y = C_1 e^{-t} + \frac{1}{3}C_0 e^{2t}$; $z = C_2 e^{-t} + \frac{1}{3}C_0 e^{2t}$.

366. $y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$; $z = \frac{1}{5}e^{-x}((C_2 - 2C_1)\cos x - (C_1 + 2C_2)\sin x)$.

367. $x = C_1\cos t + C_2\sin t$; $y = C_3 e^t + \frac{1}{2}(C_1 - C_2)\cos t + \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\sin t$;

$z = C_3 e^t + \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\cos t - \frac{1}{2}(C_1 - C_2)\sin t$.

368. Два интеграла получаются исключеніемъ t изъ системъ

$2x - y - z = -2C_1\varphi(t) + 2C_2\psi(t)$, $2y - x - z = (C_2\sqrt{3} - C_1)\varphi(t) - (C_1\sqrt{3} + C_2)\psi(t)$,

$2z - x - y = -(C_2\sqrt{3} - C_1)\varphi(t) + (C_1\sqrt{3} - C_2)\psi(t)$, гдѣ $\varphi(t) = e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}$,

$\psi(t) = e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}$.

369. $x = C_1 + C_2\cos(t\sqrt{5}) + C_3\sin(t\sqrt{5})$;

$y = 2C_1 - \frac{1}{2}(C_2 + C_3\sqrt{5})\cos(t\sqrt{5}) - \frac{1}{2}(C_3 + C_2\sqrt{5})\sin(t\sqrt{5})$,

$z = 2C_1 - \frac{1}{2}(C_2 - C_3\sqrt{5})\cos(t\sqrt{5}) - \frac{1}{2}(C_3 - C_2\sqrt{5})\sin(t\sqrt{5})$.

370. $x = e^{mt}(C_1\cos mt + C_2\sin mt) + e^{-mt}(C_3\cos mt + C_4\sin mt)$,

$y = \frac{1}{2}e^{mt}(C_1\sin mt - C_2\cos mt) + \frac{1}{2}e^{-mt}(C_4\cos mt - C_3\sin mt)$.

371. $x = \frac{3}{4}(a-b)(1-\cos 2ct)$,

$y = \frac{3}{4}(a-b) + b\cos ct + \frac{a-b}{4}\cos 2ct$;

$z = b\cos ct$.

372. $y = -23 - 2(C_1 + C_2 + C_3 x)e^x - 2(C_1 - C_3 + C_3 x)e^{-x}$

$z = -18 + (C_1 + C_2 x)e^x + (C_1 + C_3 x)e^{-x}$

373. $x = (0{,}5t + C_1)e^t + (-0{,}5t + C_2)e^{-t}$

$y = (0{,}5t + C_1 + 0{,}5)e^t + (0{,}5t - C_2 - 0{,}5)e^{-t}$

374. $x = 2C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t} + \frac{7}{40} e^{t} + \frac{1}{27} e^{2t}$,

$y = C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t} + \frac{1}{40} e^{t} + \frac{7}{54} e^{2t}$.

375. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{3xe^{ax}}{2a}$,

$z = C_1 e^{2x} - \frac{1}{3} C_2 e^{-2x} + \frac{e^{ax}\{x(2a+1)+2\}}{2a}$.

376. $x = C_1(1+2t) - 2C_2 - 2\cos t - 3\sin t$,

$y = -C_1 t + C_2 + 3\sin t$.

377. $y = \frac{1}{8} e^{x} + (1 - 2C_1 + 3C_2 - 2C_2 x) e^{-x}$,

$z = \left(\frac{3}{8} x + C_3\right) e^{x} + (C_1 + C_2 x) e^{-x}$.

378. $y = \frac{1}{2} e^{x} + e^{-x}$, $z = \frac{3}{4} e^{x} + C_1 e^{-x}$.

379. $y = -\frac{x^2}{2} + Ce^{2x} + C_1 e^{-3x}$,

$z = x^2 + x - Ce^{2x} + 4C_1 e^{-3x}$.

380. $y = -\frac{2cx}{3a^2} + \frac{b}{3a^2} - \frac{10c}{9a^3} + A_1 e^{-ax} + A_2 xe^{-ax} + A_4 e^{3ax}$,

$z = \frac{cx}{3a^2} + \frac{2b}{3a^2} - \frac{8c}{9a^3} + A_3 e^{-ax} + A_2 xe^{-ax} - A_4 e^{3ax}$.

381. $y = C_3 + C_4 x^2 - x + \left(\frac{3}{2} C_2 + C_1 - 1\right) \log \sqrt{x} + \frac{C_2}{4} (\log x)^2$.

$y + z = C_1 + C_2 \log x$.

382. $x = C_1 e^{n^2 t} + C_2 e^{-n^2 t} + \frac{n+1}{n(n^2+1)} \sin nt$.

$y = -C_1 e^{n^2 t} + C_2 e^{-n^2 t} + \frac{n-1}{n(n^2+1)} \cos nt$

383. $y = x + \frac{1+\sqrt{5}}{2} Cx^{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} C_1 x^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$,

$z = -Cx^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + C_1 x^{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

384. $y = Cx^2 + \frac{C_1}{x} - \frac{x^2}{18}\{3(\log x)^2 - 2\log x)\}$,

$z = -1 - 2Cx + \frac{C_1}{x^2} + \frac{x}{9}\{3(\log x)^2 + \log x - 1\}$.

385. $x = \frac{C_1 \cos t + C_2 \sin t}{t}$,

$y = \frac{C_3 + 2C_2 \cos t - 2C_1 \sin t}{t^2} + \frac{C_1 \cos t + C_2 \sin t}{t}$.

386. $x + y = C_1 e^{t}$; $x = -\frac{1}{3} t + \frac{C}{t^2}$.

387. $x = u\cos t + v\sin t$; $y = u\sin t - v\cos t$,

$u = (C_1 + C_2 t)\cos\frac{\sqrt{5}}{3} t + (C_3 + C_4 t)\sin\frac{\sqrt{5}}{3} t$,

$v = (C_1' + C_2' t)\cos\frac{\sqrt{5}}{3} t + (C_3' + C_4' t)\sin\frac{\sqrt{5}}{3} t$,

$2C_1' = -11C_1 - 15C_2 - \frac{5\sqrt{5}}{3} C_3$, $2C_2' = -11C_2 - \frac{5\sqrt{5}}{3} C_4$,

$2C_3' = \frac{5\sqrt{5}}{3} C_1 - 11C_3 - 15C_4$; $2C_4' = \frac{5\sqrt{5}}{3} C_2 - 11C_4$.

389. $x = -\dfrac{C_3 e^t + C_4 e^{-t}}{C_1 + C_2 t + C_3 e^t + C_4 e^{-t}}$,

$y = \dfrac{C_3 e^t - C_4 e^{-t}}{C_1 + C_2 t + C_3 e^t + C_4 e^{-t}}$,

$z = -\dfrac{C_2 + C_3 e^t - C_4 e^{-t}}{C_1 + C_2 t + C_3 e^t + C_4 e^{-t}}$.

390. $x = \dfrac{C_0 e^t}{C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t}}$,

$y = -\dfrac{(C_2 + C_3) e^t - C_3 e^{-t}}{C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t}}$,

$z = -\dfrac{(C_0 + C_3) e^t + C_3 e^{-t}}{C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t}}$.

391. $z = \sin y + \Phi(\sin x - \sin y)$.

392. $xyz = -x^4 - 2x^2 + \Phi(xy)$.

393. $z^2 = xy + \Phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

394. $xyz = \dfrac{1}{3} y^3 + \Phi(xy)$.

395. $y = \sqrt{R^2 - z^2 - x\,\Phi(z)}$.

396. $z = xy + x\,\Phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

397. $\lg z = \varphi(xy) - \dfrac{xa}{3y^2}$

398. $z = a \sin\left[xy + \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]$.

399. $y^2 = z^2 \varphi(x^2 - y^2)$.

400. $z = \dfrac{y^2 \Phi(y) + xy}{y - x\,\Phi(y)}$.

401. $4z^5 = 5x^3 y^2 + \Phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$

402. $x^{a-1}(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \Phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

403. $z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \Phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

404. $z = x\,\Phi\left(\dfrac{y}{x}\right) + x^2 - y^2$

405. $x^2 + y^2 + z^2 = y\,\Phi\left(\dfrac{z}{y}\right)$.

406. $x^3 y^3 z = \Phi\left(\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 y^2}\right)$.

407. $z = y\,\Phi\left(\dfrac{y^3 + x^2 y}{x^2}\right)$.

408. $z = e^y\,\Phi(ye^{2y^2})$.

409. $z = \sqrt{x^2 + y^2}\,\Phi\left(\log\sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}\right)$.

410. $\Phi\left(\dfrac{z}{x + y + z} + \log(x + y + z),\ y + z\right) = 0$.

411. $\Phi((x - y)(x + y + 2z),\ (x + y + 2z)(x + y - z)^2) = 0$.

412. $\Phi(y + ze^{-x},\ x + ze^{-y}) = 0$.

413. $\Phi\left(x(y - z),\ x(y - u),\ \dfrac{y + z + u}{x^2}\right) = 0$.

414. $u = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3(y + z)}{6} + \dfrac{x^2 yz}{2} + \Phi(y - x,\ z - x)$.

415. $u = \dfrac{xy}{z} \log x + x\,\Phi\left(\dfrac{x}{y},\ \dfrac{x}{z}\right)$.

416. $u = x^2 \log x + x^2\,\Phi\left(\dfrac{y}{x},\ \dfrac{z}{x}\right)$

417. $u = \Phi\left(yz + \dfrac{ax}{2}(y + \sqrt{1 - y^2}),\ xe^{\arcsin y}\right)$.

418. $\Phi((x - u)\sqrt[3]{x + y + z + u},\ (y - u)\sqrt[3]{x + y + z + u},\ (z - u)\sqrt[3]{x + y + z + u}) = 0$.

419. $z^2 + xy = h^2 + c^2$

420. $xyz - \dfrac{x^2}{2} = 1$

421. $z^2 = x^2 - y^2$.

422. $z^2 = 2xy - 2(x + y - 1) + (x + y - 1)^2$.

423. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2R^2(x^2 + y^2 + cy)$

424. $z = \operatorname{tg}\dfrac{y}{2}\left\{\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1\right\}$.

425. $(x^2 + y^2)(R^2 z^2 - c^2 y^2) = cR^2 x^2$.

426. $xy = C$.

427. 1. $x^2 + y^2 = Cy$. 2. $y^2 - C^2 = 2Cx$. 3. $xy = C$.

428. $x^2 + y^2 - Cy + a^2 = 0$.

429. $x^2 + y^2 = Ce^{\frac{2}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$

430. $y^2 = a^2 - ce^{-x^2}$.

431. $ca^2 y + c_1 = a^2 x^2 - 1$.

432. Цѣпная линія.

433. Если $\dfrac{mT}{\overline{OP}} = k$, то $kx^2 + (k - 1)y^2 = C$.

434. $x + c = a \log(a + \varepsilon\sqrt{a^2 - y^2}) - \varepsilon\sqrt{a^2 - y^2}$; $\varepsilon = \pm 1$.

435. $2x + C_1 = C \log y - \dfrac{y^2}{2C}$.

436. За ось ординатъ взята данная прямая; ось абсциссъ проведена черезъ данную точку, абсцисса которой пусть будетъ a. Уравнение искомой кривой:

$$Cx = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}\, e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x-a}}.$$

437. $x = \pm\sqrt{a^2 - y^2} + C - \log(a \mp \sqrt{a^2 - y^2})$.

438. $y = Cx^2 - \frac{c^2C}{1+C^2}$ (общ. инт.), $(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) + c^4 = 0$ (особ. инт.).

439. Единственная *кривая*, удовлетворяющая условію, будетъ:
$y^3 = \frac{27}{4}a^2x$, если a^2 данная площадь.

440. $x = \frac{a\cos^2 t}{\sqrt{C-t}}$, $y = \frac{a(2C - 2t + \sin t\cos t)}{\sqrt{C-t}}$.

441. $y^2 = 4C(a-x) + 4C^2$.

442. $2a(x+C) = y\sqrt{y^2 - a^2} - a^2\log\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}$.

443. $x = \left(y + \frac{a^2}{y}\right)$ (a^2 — данная площадь).

444. $x = x_0 \pm \frac{a}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi)$; $y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\varphi)$

445. $x = a + C\frac{2 - 3\cos^2 t}{\sqrt{\sin^3 t}}$, $y = 3C\frac{\cos^3 t}{\sqrt{\sin^3 t}}$

446. 1) $y = Cx^2 + \frac{2}{3}\frac{a^2}{x}$, 2) $y = \frac{x^2}{3a} + \frac{2a^2}{3x}$, $\rho = \frac{a}{2}$

447. $y = Cx^2$

448. $y^2 = Ce^{-\frac{2x}{a}} + ax - \frac{a^2}{2}$.

449. $y^2 - by + axy = C$.

450. $(2y-a)\sqrt{2p(2y-a)} - 3xy = C$

451. Концентрическія окружности съ центромъ на прямой, соединяющей данныя точки

452. $y^2 - C(x+y) = 0$.

453. $4x + C = 2a\sqrt{y(a-4y)} - a^2\arcsin 2\sqrt{\frac{y}{a}}$

454. Эллипсы и гиперболы.

455. $x = a\sin\alpha - C\sin\alpha - \frac{1}{2}a\sin^3\alpha$; $y = \cos\alpha + \frac{1}{2}a\sin^2\alpha\cos\alpha$.

456. $y^2 - xy - x^2 = C\left[\frac{2y + x(\sqrt{5}-1)}{2y - x(\sqrt{5}+1)}\right]^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$

457. $y^2 - xy + 2x^2 = C\cdot e^{\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2y-x}{x\sqrt{7}}\right)}$.

458. Если (x_0, y_0) данная точка, то $x = x_0 - C_1\sin\alpha + \alpha\cos\alpha + \alpha\sin\alpha$,
$y = y_0 - C_1\cos\alpha + \alpha(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$.

459. Астроиды.

460. $x = C\frac{p(p^2+2)}{\sqrt{(p^2+1)^3}}$, $y = C\frac{p^2}{\sqrt{(p^2+1)^3}}$.

461. $\rho = \frac{a}{2}\sin 2\omega$, $\theta = C + 2\omega - \operatorname{tg}\omega$. **462.** $\rho = a\sqrt{\sin 2\omega}$, $\theta = C + \omega - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\omega$.

463. Параметрическое представленіе радіуса вектора и полярнаго угла искомой кривой,

$$\rho = \frac{2a}{\sqrt{\sin 2\omega}},\quad \theta = C - \omega + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\omega.$$

464. Параметрическое представленіе радіуса вектора и полярнаго угла:
$\rho = 2a\cos\omega$, $\theta = C + \omega - \operatorname{tg}\omega$.

465. Параметрическое представленіе радіуса вектора и полярнаго угла.

$$\rho = \frac{a}{2\cos\omega},\quad \theta = C + \operatorname{tg}\omega - \omega.$$

466. $y^2 = C(C - 2x)$.

467. Если $2p$ параметръ параболъ и данная прямая взята за ось y, то уравненіе траекторій будетъ. $y + C = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{p}x^3}$.

468. $x^2 + y^2 = 2a^2 \lg Cx$.

469. Гиперболы, однофокусныя съ эллипсами.

470. Эвольвента астроиды: $x = C\cos t + \frac{1}{2} a \sin^2 t \cos t$.

$$y = (a - C)\sin t - \frac{1}{2} a \sin^3 t.$$

471. Данная прямая взята за ось абсциссъ.

$x + C = a\left(\cos t + \log tg \frac{t}{2}\right)$; $y = a \sin t$.

472 $(x^2 + y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)$

473. $(x^2 + y^2)^2 = Cxy$.

474. $y^2 = Ce^{-\frac{x}{p}} - 2px + 2p^2$.

475 $(x^2 + y^2)^3 = Cy(y^2 + 3x^2)$.

476. $(x^2 + y^2)^3 = (C - x^3 - 3xy^2)^2$.

477. Если за оси координатъ взять биссектрисы угловъ между данными прямыми, то параметрическое уравненіе траэкторій будетъ

$$x = C(1 \pm \sin\theta \cos t)\left(tg \frac{t}{2}\right)^{\pm \sin\theta}$$

$$y = \pm C \sin\theta \sin t \left(tg \frac{t}{2}\right)^{\pm \sin\theta}$$

478. $\rho = Ce^{-\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3\pi}}$

479 $\frac{1}{\rho^n} = \frac{\sin n\theta}{b^n} + \frac{\cos n\theta}{a^n}$; b параметръ.

480. $2y^2 = 1 - C(2x^2 + 1)$.

481 Параметрическое представленіе радіуса вектора и полярнаго угла для искомой кривой $r = 2R\cos t$, $\theta = t - tg\, t + C$

482 $x = -C \sin\varphi - \frac{p}{2} \sin\varphi \,.\, \lg tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$

$y = \cos\varphi - \frac{p}{2} tg\,\varphi + \frac{p}{2} \cos\varphi \,.\, \lg tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$

483. $x = \frac{C}{ch\, t} + a(t - th\, t)$

$y = C\, th\, t + \frac{a}{ch\, t}$.

484. $x = C \sin t + a(\cos t + t \sin t)$

$y = -C\cos t + a(\sin t - t\cos t)$.

485. $x = a(\cos t + t \sin t) - \cos t\left(\frac{at^2}{2} + c\right)$

$y = a(\sin t + t\cos t) - \sin t\left(\frac{at^2}{2} + c\right)$

486. $\rho = C_1(1 + \cos(\theta - 2\alpha))$.

487. $r^2 = \frac{C_1^2}{\cos(2\theta + \alpha)}$

488. $\rho = C_1 \cos(\theta - \alpha)$.

460. $x = Ce^x(\sin\varphi + \cos\varphi) - R\sqrt{2}\sin\varphi$

$y = Ce^x(\sin\varphi - \cos\varphi) + R\sqrt{2}\cos\varphi$.

490. $x = C \pm \frac{a}{4} tg^2\theta(t - \sin t)$,

$y = \frac{a}{4} tg^2\theta(1 + \cos t)$,

$z = a\, tg\,\theta \cos\frac{t}{2}$.

451. $x = \frac{a \cot\gamma}{\cos t}\cos(C + tg\, t - t)$,

$y = \frac{a \cot\gamma}{\cos t}\sin(C + tg\, t - t)$,

$z = \frac{a \cot^2\gamma}{2\cos^2 t}$.

492. $x = a\, ch\, t \cos(C + t)$,

$y = a\, ch\, t \sin(C \pm t)$,

$z = at$.

493. Въ полярныхъ координатахъ $\begin{cases} \theta - \theta_0 = tg\,\alpha \,.\, \sqrt{1 + \frac{1}{h}} \,.\, \log\left(\frac{r}{r_0}\right), \\ z = \frac{r}{\sqrt{h}}. \end{cases}$

494. Въ сферич. координатахъ $v - v_0 = tg\,\alpha \,.\, \log tg \begin{Bmatrix} tg\frac{u}{2} \\ tg\frac{u_0}{2} \end{Bmatrix}$.

495. Если уравненіе параболоида $x^2 + y^2 = 2az$, то въ полярныхъ координатахъ:
$$\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}} - \sqrt{1+\frac{r_0^2}{a^2}} + \log\left\{\frac{\sqrt{r^2+a^2}-a}{\sqrt{r_0^2+a^2}-a}\cdot\frac{r_0}{r}\right\} = \cot\alpha\,.\,(\theta-\theta_0);\quad z = \frac{r^2}{2a}.$$

496. Въ системѣ $x = \frac{a\,sh\,u_0\cos\psi}{ch\,u_0-\cos v}$, $y = \frac{a\,sh\,u_0\sin\psi}{ch\,u_0-\cos v}$, $z = \frac{a\sin v}{ch\,u_0-\cos v}$ можно представить поверхность кольца $(x^2+y^2+z^2+a^2)^2 = 4a^2\coth^2 u_0\,(x^2+y^2)$, у котораго радиусъ вращающагося круга $R_0 = \frac{a}{sh\,u_0}$ и разстояніе центра этого круга до оси вращенія $R = a\coth u_0$. Тогда искомыя линіи представятся уравненіемъ
$$\psi - \psi_0 = \frac{R_0\,tg\,\alpha}{\sqrt{R^2-R_0^2}}\,(v-v_0).$$

497. $e^{ay+C_2} = \sec(ax+C_1)$.

498. Если уравненія данныхъ прямыхъ $y=0$ и $y=h$, то уравненіе искомой кривой будетъ: $y + h\log\cos\frac{x+C}{h} = C_1$.

499. Если обозначить это отношеніе черезъ $\frac{1}{k}$, то $r^{k-1} = a^{k-1}\sin(k-1)(\theta-\theta_0)$.

500. Уравненіе искомой кривой въ полярныхъ координатахъ
$\rho^2 = \rho_0^2\cos 2\vartheta$ или $\rho^2 = \rho_0^2\,ch\,2\vartheta$.

501 $\rho = \frac{C_0}{\cos^2 t}$; $\theta = C_1 - 2t + tg\,t$.

502 Параметрическое представленіе радіуса вектора и полярнаго угла искомой кривой: $\rho = \frac{C}{\sqrt{1-\sin\omega\cos\omega}}\,e^{\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\frac{2\,tg\,\omega-1}{\sqrt{3}}}$
$$\theta = C_1 - \omega + \frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\frac{2\,tg\,\omega-1}{\sqrt{3}}.$$

503. Параметрическое представленіе кривой
$$y = \frac{s}{2}\sin\log(s+\sqrt{s^2+a^2}) - \frac{\sqrt{s^2+a^2}}{2}\cos\log(s+\sqrt{s^2+a^2})$$
$$x = \frac{s}{2}\cos\log(s+\sqrt{s^2+a^2}) + \frac{\sqrt{s^2+a^2}}{2}\sin\log(s+\sqrt{s^2+a^2})$$

504. Эвольвенты круга. **505.** Кардоиды.

506. Кривая въ точкѣ M_0 необходимо касается линіи OM_0. Если взять эту линію за ось абсциссъ, перпендикуляръ къ ней изъ O за ось ординатъ, то параметрическое представленіе кривой будетъ таково: $x = \frac{ds}{d\alpha}\cos\alpha + s\sin\alpha$,
$$y = \frac{ds}{d\alpha}\sin\alpha - s\cos\alpha,\quad s = \frac{2a}{\sqrt{3}}\,e^{\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right).$$

508. $x^2+y^2+z^2 = \Phi\left(arctg\frac{y}{x} \pm \log\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

509. $z^2 = \pm 4a^2\,arctg\frac{x}{y} + \Phi(x^2+y^2)$. **510.** $x^2+y^2+z^2 = x\,\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$.

511. $\Phi(x^2-y^2,\ 2x^2+z^2) = 0$. **512.** $\Phi(x^2-y^2,\ x^2-z^2) = 0$.

513. $z(x^2+y^2+z^2) = h(z^2+2y^2)$. **514.** $x^2+y^2+2z^2 = R^2+2c^2$.

—

ОТДѢЛЪ X.

1. $\frac{\pi}{4}$.

2. $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

3. $\frac{\pi}{4}$.

4. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

5. $\frac{\pi}{3}$.

6. $\frac{\pi}{2}$, если $0 < \alpha < \pi$.
$\frac{\pi}{2}$, если $\pi < \alpha < 0$

7. $\frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

8. $\frac{\pi}{6}(b - a)(a + 3b)$

9. $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2} - 1)$

10. $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \log \frac{1 + \sqrt{\alpha\beta}}{1 - \sqrt{\alpha\beta}}$.

11. $\frac{\pi}{2} \frac{2 - \alpha\beta}{1 - \alpha\beta}$.

12. $\frac{\pi}{1 - \alpha\beta}$.

13. $\frac{\pi}{2} \frac{1 + a^2}{1 - a^2}$.

14. 2 при $\alpha < 1$, $\frac{2}{\alpha}$ при $\alpha > 1$

15. $\frac{1}{\alpha} \log \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$.

16. $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3}$.

17. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

18. $\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

19. $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n + 1)}$.

20. $\frac{\pi}{2a^{2n-1}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n - 2)}$.

21. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n - 2)} \frac{-A^{n-1}}{(AC - B^2)^{n + \frac{1}{2}}}$.

22. $\frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{(m + 1)^{n+1}}$.

23. $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{2^{n+1} \cdot 3^2} \sin(n + 1)\frac{\pi}{4}$.

24. $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{2^{n+1} \cdot 3^2} \cos(n + 1)\frac{\pi}{4}$.

25. $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{2^{n+1}}$.

26. $\frac{\pi}{2^{2m+2}}$.

27. $\frac{\pi}{2^{2m+1}}$.

28. $\frac{\pi}{2^{n+2k+1}} \frac{(n + 2k)(n + 2k - 1) \ldots (n + k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}$.

29. $\frac{1}{m - 1}$.

30. $\frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \ldots + \frac{2^{m-1}}{m}\right)$.

31. $J = 0$ при m четномъ и $J = \pi$ при m нечетномъ.

32. $\frac{(-1)^{m-1}}{2}\pi$.

33. $\frac{(-1)^{m-1}}{4m}\pi$.

34. $(-1)^m \lambda_{2m} = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{2k-1}\log tg\frac{3\pi}{8}$

$(-1)^{m-1}\lambda_{2m+1} = \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^{\frac{g-1}{2}}}{g}$, где $g = m - \frac{1+(-1)^m}{2}$

35. $(-1)^k J_k = -\frac{1}{\alpha} + 2\sum_{m=1}^{k-1}\frac{(-1)^{m-1}\alpha}{\alpha^2+4m^2}$

36. $(-1)^k J_k = \frac{\pi}{\alpha}\left\{-\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{k-1}(-1)^{m-1}e^{-\frac{m^2}{\alpha}}\right\}$

37. 1. $m \geq n$. $J = \frac{m}{m+n}\cdot\frac{m-1}{m+n-2}\cdot\frac{m-2}{m+n-4}\cdots\frac{1}{m+n-2(m-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(n-m)x\,dx$

2. $m \geq n$. $J = \frac{m}{m+n}\cdot\frac{m-1}{m+n-2}\cdots\frac{m-(n-1)}{m+n-2(n-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-n}x\,dx$.

38. 1. Если m и n разной четности, то $J = 0$.
2. Если m и n одинаковой четности, то $J = 0$ при $n > m$ и

$J = \frac{\pi}{2^{m+1}}C_m^{\frac{m-n}{2}}$ при $n \leq m$.

39. $\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)\ldots(a^2+(2n)^2)}$

40. $\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n+1)}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)\ldots(a^2+(2n+1)^2)}$

41. $\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}{(m^2+2^2)(m^2+4^2)\ldots(m^2+4n^2)}\frac{2sh\frac{m}{2}}{m}$

42. $2ch\frac{m\pi}{2}\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n+1)}{(m^2+1^2)(m^2+3^2)\ldots(m^2+(2n+1)^2)}$

43. $\frac{\alpha^m}{1-\alpha^2}$ при $\alpha < 1$.

44. $\frac{\pi}{2}\alpha^{m-1}$ при $\alpha < 1$

45. $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)^m$

46. $\frac{2\pi^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)^n$

47. $\frac{\pi}{2(1-\alpha\beta)}$ при $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$.

48. $\frac{\pi}{\alpha}\log(1+\alpha)$ при $\alpha < 1$.

49. $\frac{\pi}{2(1-\alpha^2)}\frac{1-\alpha e^{-m}}{1+\alpha e^{-m}}$ при $\alpha < 1$.

50. $\frac{\pi}{2(\alpha+e^{m})}$ при $\alpha^2 < 1$

51. При $\alpha < 1$: 0.
При $\alpha > 1$. $\pi\log\alpha^2$.

52. 1. $\alpha^2 < 1$ $J = -\frac{\pi\alpha^k}{k}$, 2. $\alpha^2 > 1$: $J = -\frac{\pi}{k\alpha^k}$.

53. $\pi\log\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)$.

54. $\frac{\pi\alpha}{2(1-\alpha^2)}$.

55. Если положить $\frac{l}{k} = \frac{\lambda}{\mu}$, где $\frac{\lambda}{\mu}$ дробь несократимая, то $J = \pi\frac{1+r^{\lambda}s^{\mu}}{1-r^{\lambda}s^{\mu}}$.

56. $-\frac{\pi^2}{8}$.

57. $\frac{\pi^2}{4}$

58. $\frac{\pi^2}{4}$.

59. $\frac{\pi^2}{8a^2}$.

60. $-\frac{\pi}{4m}$. Слѣдуетъ принять въ соображеніе рядъ

$$\log \sin x = -\log 2 - \cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{3}\cos 6x - \ldots$$

61. $(-1)^n \frac{2\pi a^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n}$.

62. 0.

65. $\frac{\pi}{8}\log 2$.

66. $\frac{\pi^2}{4}$

67. $-\frac{\pi}{2}\log 2$.

68. $-\frac{\pi^2}{2}\log 2$.

69. $\frac{\pi^3}{8}$.

70. $\frac{\pi}{2}\left\{(\log 2)^2 + \frac{\pi^2}{12}\right\}$.

71. 1. $\frac{\pi^2}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots (2m-1)}{4 \cdot 6 \cdot \ldots 2m}$; 2. $\pi\,\frac{2}{3 \cdot 5}\,\frac{4 \cdot 6 \cdot \ldots 2m}{7 \cdot \ldots (2m+1)}$

72. $ae^{a^2}\sqrt{\pi}$.

73. $\frac{\sqrt{\pi}}{2\beta}e^{\frac{\alpha^2}{\beta^2}}$.

74. $\sqrt{\pi}\,\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(b-a)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{(\alpha+\beta)^2}{b-a}}$.

76. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}$.

77. $\frac{\pi}{b}\log(1+ab)$.

78. $\pi(\sqrt{1-a^2}-1)$

79. $\pi\log\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$

80. $-(\arcsin\alpha)^2$.

81. $2\pi\left\{a\log\left(1+\frac{b}{a}\right)+b\log\left(1+\frac{a}{b}\right)\right\}$.

82. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\alpha\log(1+\alpha^2)$.

83. $\log(1+a)$.

84. $-\sum_{i=1}^{n} A_i \log\alpha_i$.

85. $\alpha-\beta+\beta\log\frac{\beta}{\alpha}$.

86. $\log\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2(\alpha+\beta)}}$.

87. $\pi\log\frac{m+1}{2}$.

88. $\pi\log\frac{a+b}{2}$.

89. $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{k}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{k}$.

90. $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$.

91. $\sqrt{\pi}(b-a)$.

92. $\frac{\pi}{2}\beta-\pi\sqrt{\alpha}$.

88. $\log\sqrt{1+\frac{4b^2}{a^2}}$.

94. $b\operatorname{arctg}\frac{2b}{a}-\frac{a}{4}\log\left(1+\frac{4b^2}{a^2}\right)$.

95. $\pi\alpha$.

90. $\pi\log\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$.

97. $\pi\arcsin\alpha$.

90. $\pi\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

99. $-\frac{(\arccos a)^2}{2}+\frac{\pi^2}{8}$.

100. $\frac{\pi}{a}(e^{-ac}-e^{-ab})$.

101. $\frac{\pi}{2}\log(1+\alpha)$.

102. $\frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{1+m^2}-1}{m}$.

100. $\frac{\pi}{2}\log(m+\sqrt{1+m^2})$.

104. $\frac{\pi}{2}\log(a+\sqrt{1+a^2})$.

105. $\frac{\pi}{2}\log(1+a)$.

106. $\frac{\pi}{2}\log\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

107. $\frac{\pi}{2}\log\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\beta^\beta}$.

108. $J = \pi\log 2$

109. $\frac{\pi}{4}((\alpha^2-\beta^2)\log(\alpha+\beta)-\alpha^2\log\alpha+\beta^2\log\beta+\alpha\beta)$.

110. $\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{\frac{\beta^2}{\alpha^2}}$.

111. $(-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \frac{d^{2n} e^{-\beta^2}}{d\beta^{2n}}$.

112. $(-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}} \frac{d^{2n-1} e^{-\beta^2}}{d\beta^{2n-1}}$.

113. $-\frac{\sqrt{\pi}}{4e}$

119. $\log 2$.

120. $\frac{\pi}{4}$

121. $\frac{3}{4} \log 3$.

122. $\frac{\pi}{4}$.

124. Оба интеграла равны $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

130. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

131 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

132. $\frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{1 \cdot 4 \cdot \ldots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot \ldots 3n}$.

133. $\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$.

134. $\frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$.

135. $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$.

136. $\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$.

138. $\frac{1}{a^\beta (1+a)^\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

139. $\frac{\pi}{a^{1-\alpha}(1+a)^\alpha \sin \pi\alpha}$

140. $\frac{2^{n-1}\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(n)}$.

141. $\frac{B(l, m)}{2a^l b^m}$.

142. $\pi \cot \pi a$. Находится на основаніи интеграла $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ $(0 < a < 1)$

143. $\frac{\pi a}{\sin a\pi}$

144. π.

145. $\pi \log 2$.

146. $\frac{\pi^2 \sin \frac{\pi a}{2}}{4 \cos^2 \frac{\pi a}{2}}$.

147. $\frac{\pi^2}{8} \frac{1+\sin^2 \frac{\pi a}{2}}{\cos^2\left(\frac{\pi a}{2}\right)}$.

148. $\frac{\pi}{2b} tg \frac{\pi a}{2b}$.

151. $\frac{\pi}{2\nu} tg \frac{\pi\mu}{2\nu}$.

152. $\frac{\pi}{2\nu \cos \frac{\pi\mu}{2\nu}}$.

153. $\frac{1}{2} \log \sec \pi a$.

154. $\frac{\pi}{2\,ch \frac{\pi\mu}{2}}$.

157. $\log \sqrt{2\pi}$.

158. $\log \sqrt{2\pi} + a \log a - a$.

159. $\frac{\pi a}{4} e^{-a}$.

160. $\frac{\pi(a+1)}{4} \cdot e^{-a}$.

161. $\frac{\pi}{2}(2e^{-a} - 1)$.

162. $\frac{\pi}{4} \frac{1}{a} \frac{e^{2a}}{}$.

164. $\frac{\pi}{2} |\alpha|$.

105. $\pm \frac{3\pi a^2}{8}$. (Верхній знакъ при $\alpha > 0$, нижній при $\alpha < 0$).

166. $\frac{\pi}{3}|\alpha|^3$.

167. $\frac{\pi b}{2}$

168. $\frac{\pi}{4}(2-a)$.

169. $\frac{\pi}{2}$ при $a>2$, $\frac{\pi a}{2}-\frac{\pi a^2}{8}$ при $a<2$.

170. $\frac{\pi t}{2}\left(1-\frac{1}{4}t\right)$ при $0<t<2$; $\frac{\pi}{2}$ при $t>2$.

171. $\frac{\pi}{4}$.

172 $\frac{\pi}{4}$.

173. $\frac{e-1}{2e}\sqrt{\pi}$.

175. $\log\frac{b}{a}$.

176. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$.

177. $\frac{\pi}{2}\log\frac{a}{b}$.

178. $-a\log a$.

179. $a\log a \quad a$.

180 $\frac{\log a}{2a^k}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)^2}{\Gamma(k)}$.

ОТДѢЛЪ XI

1. Рядъ сходящійся при $x > 1$ и расходящійся при $x \leqq 1$.
2. Рядъ сходящійся при x неравномъ ± 1, расходящійся при $x = \pm 1$.
3. Рядъ сходится при всякомъ x.
4. Рядъ сходится при $x < 1$ и $x > 1$; расходится при $x = 1$.
5. При $|x| < 4$ рядъ сходящійся, при $|x| \geqq 4$ расходящійся.
6. Рядъ сходящійся при $|x| < e$ и расходящійся при $|x| \geqq e$.
7. Рядъ абсолютно сходящійся при $|x| < \frac{1}{e}$, расходящійся при $|x| > \frac{1}{e}$. При $x = \frac{1}{e}$ рядъ расходящійся, при $x = -\frac{1}{e}$ — сходящійся.
8. При $|x| < 1$ рядъ абсолютно сходящійся. При $x = +1$ рядъ сходящійся, когда $\gamma > \alpha + \beta$. Наконецъ при $x = -1$ рядъ сходящійся когда $\gamma > \alpha + \beta - 1$.
9. Рядъ сходящійся при $x > 1$, расходящійся при $x \leqq 1$.
10. Рядъ сходящійся при $b > a + 2$, расходящійся при $b \leqq a + 2$.
11. Рядъ сходящійся при $b > a \geqq 0$, расходящійся при $a \geqq b \geqq 0$.
12. Рядъ сходящійся.
13. Рядъ расходящійся.
14. При $\alpha > 2$ рядъ сходящійся, при $\alpha \leqq 2$ — расходящійся.
15. При $\alpha > \beta$ рядъ сходящійся, при $\alpha \leqq \beta$ — расходящійся.
16. При $a < \frac{1}{e}$ рядъ сходящійся, при $a \geqq \frac{1}{e}$ — расходящійся.
17. Рядъ расходящійся.
18. Рядъ сходящійся.
19. Рядъ сходящійся.
20. Рядъ расходящійся.
21. Рядъ сходится при условіи $2p > 1$.
22. Рядъ сходится при условіи $p > \frac{2}{3}$.
23. Условіе сходимости $a > 2$.
24. Рядъ сходится при условіи $p > \frac{1}{2}$.
25. Рядъ сходящійся.
26. Рядъ сходящійся.
27. Рядъ сходящійся.
28. При $x < \frac{1}{e}$ рядъ сходится, при $x > \frac{1}{e}$ расходится.
29. Рядъ расходящійся.
30. Рядъ сходящійся при $x > 1$, расходящійся при $x < 1$.
31. Рядъ расходящійся.
32. Рядъ сходящійся.
34. Рядъ сходящійся.
35. Рядъ сходящійся.
36. Рядъ сходящійся при $\mu > 2$ и расходящійся при $\mu \leqq 2$.
37. $na + \frac{n(n-1)}{2} b + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2 \cdot 3} c$.
38. $\frac{n(4n^2-1)}{3}$.
39. $(n+1)(2n+1)(8n^2+12n+1)$.
40. $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$.
41. $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$.
42. $\frac{n+1}{30}\{(n+1)^4 - 1\}$.

48. $-\frac{n^2(2n+3)}{4}$ при n четномъ, $\frac{2n^3+3n^2-1}{4}$ при n нечетномъ

44. $(-1)^{n-1}\frac{n^4+2n^3-n}{2}$

46. $\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n-1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

47. $\frac{\sin nx}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}-\frac{n\cos\frac{2n-1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

48. $\frac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\cos\frac{(n-1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

49. $\frac{\cos(n-1)x}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}+\frac{n\sin\frac{2n-1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

50. $\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$.

51. $S=-\frac{\sin nx\cos\frac{2n+1}{2}x}{\cos\frac{x}{2}}$.

52. $S=n-\frac{\sin nx\cos(n+1)x}{\sin x}$

53. $\frac{(-1)^{n-1}\sin^2 2nx-(1+(-1)^{n-1})\sin^2 x}{2\cos 2x}$.

54. $\frac{\pi-x}{2}$

56. $\frac{x\sin\alpha-x^n\sin n\alpha+x^{n+1}\sin(n-1)\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

57. $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$

58. $\frac{1-x\cos\alpha-x^n\cos n\alpha+x^{n+1}\cos(n-1)\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

59. $\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$

50. $\frac{x}{(x-1)^2}+\frac{a}{1-x}$.

61. $\frac{1+x}{(1-x)^3}$.

62. $\frac{x-7x^2-3x^3-15x^4}{(1+x)^4}$

63. $\frac{1+11x+11x^2+x^3}{(1-x)^5}$.

64. $\frac{1-z}{1-z-2z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+2(-1)^n}{3}z^n$.

Область сходимости $-\frac{1}{2}<z<\frac{1}{2}$.

65. $\frac{1-z}{1-5z+6z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(2\cdot 3^n-2^n)z^n$.

Область сходимости $\frac{1}{3}<z<\frac{1}{3}$.

66. $\frac{1+z+z^2}{1-z-z^2+z^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{3}{4}n+\frac{9+(-1)^n}{8}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}\right\}z^n$.

Область сходимости: $-1<z<+1$.

67. $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1+(-1)^{n-1}}{4}x^{n-1}$.

68. $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(n+1)(n+5)}{12}+\frac{17}{72}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}\right\}x^n$.

69. $$\frac{a+bz}{(1-2z\cos\varphi+z^2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty} a\,\frac{(n+3)\sin(n+1)\varphi-(n+1)\sin(n+3)\varphi}{4\sin^3\varphi}\,z^n+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} b\,\frac{(n+2)\sin n\varphi-n\sin(n+2)\varphi}{4\sin^3\varphi}\,z^n$$

Область сходимости: $|z|<1$

71. $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+n}$.

72. $\frac{1}{2}$.

73. $\frac{1}{3}$.

74. $\frac{1}{p}\left(\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\ldots+\frac{1}{c+p}\right)-\frac{1}{p}\left(\frac{1}{c+n+1}+\frac{1}{c+n+2}+\ldots+\frac{1}{c+n+p}\right)$

75. $\frac{11}{18}$.

76. $\frac{23}{90}$.

77. 1.

78. $\frac{5}{16}$.

79. $\frac{1}{8}$.

80. $\frac{5}{36}$.

81. $\frac{1}{2c(c+1)}-\frac{1}{2(c+n)(c+n+1)}$.

82. $\frac{1}{4}$.

84. $\frac{13}{420}$

05 $\frac{73}{1080}$.

59. $\frac{1}{3c(c+1)(c+2)}-\frac{1}{3(c+n)(c+n+1)(c+n+2)}$.

87. $\frac{1}{90}$.

88. $\frac{5}{36}$.

90. $\frac{\pi}{4}$.

91 $\frac{\pi}{4}$.

92. $\frac{\pi}{3}$.

93. $S_n=\frac{x}{1-x}-\frac{2^n x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$, $S=\frac{x}{1-x}$ при условии $|x|<1$.

94. $S=\frac{x}{1-x}$, если $|x|<1$; $S=\frac{-1}{x-1}$, если $|x|>1$

95. $S_n=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x$; $S=\frac{1}{x}-\cot x$.

96. $S_n=\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2-\left(\frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\right)^2$; $S=\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2-\frac{1}{x^2}$.

97. $S=\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt$

98. $S=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\log 2\right)$

96. $S=\frac{1}{4\sqrt{2}}(\pi+2\log(\sqrt{2}+1))$.

190. $S=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

101. $S=\log 2$.

102. $S=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$.

103. $S=\frac{5\pi}{12}$.

104. $S=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

105. $S=\frac{\pi(\sqrt{2}+1)}{8}$

106 $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(1+\sqrt{2}\right)$

107. $S=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

108. $S=\frac{1}{3-a}\int_0^1\frac{x^a-x^3}{1-x}\,dx$

106. $S = \frac{1}{4}$.

110. $S = \frac{\pi}{8}$.

111. $S = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

112. $S = \frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{h}\right)$

113. $S = \frac{(-1)^h}{h}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{h-1}}{h}\right)+\frac{1}{h}(-1)^h \log 2.$

114. Пусть $\frac{\varphi(n)}{(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)\ldots(n+\alpha_k)} = \sum_{1}^{k}\frac{A_s}{n+\alpha_s}$. Въ силу поставленныхъ условій имѣемъ: $A_1+A_2+\ldots+A_k=0$ и $S = \int_0^1 \frac{\sum_{1}^{k} A_s x^{\alpha_s}}{1-x}\,dx$

115. $S = \log 4 - 1$

116 $S = -\frac{5}{36}+\frac{2}{3}\log 2.$

117. $S = \frac{1}{8}$

118. $S = \log 2 - \frac{1}{2}$

119. $S = \frac{1}{2}(1-\log 2).$

120. $S = \frac{3}{4}-\log 2$

121. $S = \frac{\pi-3}{4}$.

122. $S = \frac{1}{6}-\frac{1}{4}\log 3+\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$

123. $S = \frac{37}{2268}$.

124. $S = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$.

125. $S = \frac{3\pi^2}{256}-\frac{1}{9}$.

196. $S = 2-\frac{\pi^2}{6}$

127. $S = \frac{\pi^2}{36}-\frac{2}{81}\log 2-\frac{25}{972}$

128. $S = \frac{\pi^2}{16}-\frac{39}{\ldots}$.

129. $S = \frac{1}{h}x^{-h}\sum_{n=1}^{h}\frac{x^n}{n}+\frac{x}{h}\cdot(x^h-1)\log\frac{1}{1-x}$.

130. $S = \frac{3}{4x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{(1-x)^2}{2x^3}\log\frac{1}{1-x}$

131. $S = \frac{5}{24x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{(1-x)^2}{16x^2\sqrt{x}}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ при $x>0$;

$S = \frac{5}{24x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{(1-x)^2}{8x^2\sqrt{-x}}\,arctg\sqrt{-x}$ при $x<0$.

132. $S = \frac{1}{1-x}+\frac{3(8x-x^2-10)}{x^5\sqrt{x}}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{2(3150-1470x+105x^2+51x^3+53x^4)}{105x^6}$ при $x>0$;

$S = \frac{1}{1-x}+\frac{6(8x-x^2-10)}{x^5\sqrt{-x}}\,arctg\sqrt{-x}+\frac{2(3150-1470x+105x^2+51x^3+53x^4)}{105x^6}$ при $x<0$.

133. $S = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2}).$

134. $S = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

135. $tg\,\theta$ при $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

136 $\frac{2\sin\theta+\log\cos\theta-2\log\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}$.

137. $S = \frac{3\sqrt{2}-4}{2}$.

153 $S = 1$.

139. $S = 1+\log 2.$

140. $S = \frac{\pi}{2}\log 2.$

141. $S = \frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{4}(\log 2)^2$

142. $F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}(1-zx)^{-\beta}\,dz.$

149. $F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}$ при условіяхъ: $\alpha > 0$; $\gamma - \alpha - \beta > 0$.

144. $S = 1 + ax\int_0^1 \frac{(1-z)^{b-a}}{(1-xz)^{a+1}}\,dz$

145. $S = \int_0^1 \frac{t^{a-1}(1-t)^k}{1-xt^b}\,dt.$

146. $S = \frac{4}{\pi}.$

147. $S = \frac{2}{\pi}.$

148. $S = 1 - \frac{2}{\pi}$

149. $S = \frac{1}{x-2}$ при $x > 2$.

150. $S = \frac{b-1}{b-a-1}.$

151. $S = \frac{a(b-1)}{(b-a-1)(b-a-2)}$

152. $S = \frac{\pi}{2}$

153 $S = \frac{1}{\sqrt{3}}\log(2+\sqrt{3}).$

154. $S = \frac{9\sqrt[3]{2}}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \frac{dz}{(1+z^3)^2} = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}\log(1+\sqrt[3]{2}) - \frac{\sqrt[3]{2}}{4}\log 3 +$

$+ \frac{\sqrt[6]{108}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt[3]{2}}{4\sqrt{3}}$

156. $S = e^x\int_0^1 z^{\alpha-1}e^{-xz}\,dz.$

158. $S = \frac{1}{4}\log\frac{1+z}{1-z} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z$

159. $S = \frac{1}{4}\log\frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z.$

190. $S = \frac{1}{4}(e^z + e^{-z} + 2\cos z)$

161. $S = \frac{1}{3}\left(e^z + 2e^{-\frac{1}{2}z}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$

172. $y = x^2 + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{x^6}{3} + \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\frac{x^8}{4} + \dots$

173. $f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-1}\sin 2kx.$

174. $|x|^3 = \frac{\pi^3}{4} + \frac{3\pi}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos 2jx}{j^2} - 6\pi\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(2j-1)x}{(2j-1)^2} + \frac{24}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(2j-1)x}{(2j-1)^4}$

$\frac{\pi^2}{6}, \quad \frac{\pi^4}{96}, \quad \frac{\pi^4}{90}.$

175. $e^x = \frac{e^h - e^{-h}}{2h} - h(e^h - e^{-h})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos\frac{n\pi x}{h}}{h^2+n^2\pi^2} + (e^h - e^{-h})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n\sin\frac{n\pi x}{h}}{h^2+n^2\pi^2}$

176. $\cos ax = \frac{2\sin\pi a}{\pi}\left\{\frac{1}{2a} + \frac{a\cos x}{1^2-a^2} - \frac{a\cos 2x}{2^2-a^2} + \dots\right\}$

177. $\sin ax = \frac{2\sin\pi a}{\pi}\left\{\frac{\sin x}{1^2-a^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2-a^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2-a^2} - \dots\right\}$

178. $\operatorname{sh} ax = \frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\left\{\frac{\sin x}{a^2+1^2} - \frac{2\sin 2x}{a^2+2^2} + \frac{3\sin 3x}{a^2+3^2} - \dots\right\}$

179. $\operatorname{ch} ax = \frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{2a} - \frac{a\cos x}{a^2+1^2} + \frac{a\cos 2x}{a^2+2^2} - \frac{a\cos 3x}{a^2+3^2} + \dots\right\}$

196. $\log\cos\frac{x}{2} = -\log 2 + \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \dots$

182 $S = \frac{11\sqrt{2}\,\pi^4}{1536}.$

189 $\frac{x(\pi-x)}{2}$

196. Если $\varphi + \theta < \pi$, то $S = \frac{1}{4}\pi\varphi$, когда $\varphi \leqq \theta$, и $S = \frac{1}{4}\pi\theta$, когда $\varphi > \theta$. Если же $\varphi + \theta > \pi$, то $S = \frac{1}{4}\pi(\pi - \theta)$, когда $\varphi \leqq \theta$ и $S = \frac{1}{4}\pi(\pi - \varphi)$, когда $\varphi > \theta$.

191. *A.* $0 < \varphi + \vartheta < \pi$. $\begin{cases} S = 0 \text{ при } \vartheta > \varphi, \\ S = \frac{\pi}{8} \text{ при } \vartheta = \varphi; \\ S = \frac{\pi}{4} \text{ при } \vartheta < \varphi. \end{cases}$

B. $\pi < \varphi + \vartheta < 2\pi$ $\begin{cases} S = -\frac{\pi}{4} \text{ при } \vartheta > \varphi, \\ S = -\frac{\pi}{8} \text{ при } \vartheta = \varphi; \\ S = 0 \text{ при } \vartheta < \varphi; \end{cases}$

192. Искомая сумма $= \frac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$. Если предположить $-\pi < x < +\pi$, то искомая сумма $= \frac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < \pi$ и $= -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ при $-\pi < x < 0$.

193 Искомая сумма $= -\frac{1}{2}\log\left(4\sin^2\frac{1}{2}x\right)$.

194. Искомая сумма $= \frac{\pi}{4}$ при $0 < x < \pi$.

195. Искомая сумма $= \frac{1}{4}\log\cot^2\frac{1}{2}x$. **196** $S = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\log\frac{1+\sin x}{\cos x}$.

197. $S = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\log tg\frac{x}{2}$.

198. $S = \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{4} - \frac{\pi - x}{2}\sin x$ $S' = \sin x\left(\frac{1}{4} - \log 2\sin\frac{1}{2}x\right)$.

199. 1. $S = \frac{3}{2}\log 2$, 2. $\frac{1}{2}\log 2$; 3. $S = 0$.

202. $S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\log 2$. **203.** $S = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\log 2$.

204. Искомая сумма $= 1$. **205.** $S = 1 - \log 2$; $S' = -\log 2$.

206. $S = \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2}$

207. $S = \frac{\pi^2}{12} + \log 2 - 1$; $S' = \frac{\pi^2}{4} - \log 2 - \frac{3}{2}$

210. $S = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2$.

212. $P_1(x) = x$; $P_2(x) = x(x+1)$; $P_3(x) = x(x^2 + 3x + 1)$.
Вообще: $P_{k+1}(x) = x\{P_k(x) + P'_k(x)\}$;

$$P_{k+1}(x) = x\left(1 + kP_1 + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2}P_2 + \ldots + P_k\right).$$

Указание рассмотрѣть $\left\{\begin{matrix} d^k e^{xe^{\xi}} \\ d\xi^k \end{matrix}\right\}_{\xi=0}$

216. $S = \frac{a_1}{\theta}$. **217** $S = \frac{a_1}{\theta}\left(1 - \frac{1}{\prod\limits_{i=2}^{\infty}\left(1 + \frac{\theta}{a_i}\right)}\right)$

218. $S = \frac{1}{\theta}$ **219.** $S = \frac{1}{\theta}$.

220 $S = \frac{1}{\theta^2}\left(1 - \frac{\pi\theta(\theta^2 + 1)}{sh\,\pi\theta}\right)$. **221.** $S = \frac{1}{\theta^2}\left(1 - \frac{1 + \theta^2}{ch\frac{\pi\theta}{2}}\right)$.

221. $S = \frac{\pi - x}{2a^2} - \frac{\pi\, sh\, a(\pi - x)}{2a^2\, sh\, \pi a}$, $S' = -\frac{x}{2a^2} + \frac{\pi\, sh\, ax}{2a^2\, sh\, \pi a}$.

226. $S = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi\, ch\, a(\pi - x)}{2a\, sh\, \pi x}$; $S' = -\frac{1}{2a^3} + \frac{\pi ch\, ax}{2a\, sh a\pi}$

227. $S = \frac{\pi a - 1}{2a^2} + \frac{\pi}{a(e^{2\pi a} - 1)}$, $S' = \frac{\pi}{4a} - \frac{\pi}{2a(e^{\pi a} + 1)}$

228. $S = \frac{\pi a - 2}{4a^4} + \frac{\pi\,(2\pi a + 1)\, e^{2\pi a} - 1}{2a^3 (e^{2\pi a} - 1)^2}$, $S' = +\frac{\pi}{8a^3} - \frac{\pi\,(\pi a + 1)\, e^{\pi a} + 1}{4a^3 (e^{a\pi} + 1)^2}$

229. $S = \frac{\pi}{8}\left(\frac{z}{\pi} + \cos z \frac{sh z}{sh \pi}\right)$; $S_1 = \frac{dS}{dz}$

230. $S = \frac{\pi}{x^3 \sqrt{2}} \frac{sh(\pi x \sqrt{2}) + \sin(\pi x \sqrt{2})}{ch(\pi x \sqrt{2}) - \cos(\pi x \sqrt{2})}$

242. $S(x) = arctg \frac{e^{\frac{\pi x}{2}} - 1}{e^{\frac{\pi x}{2}} + 1}$

243. $S = \frac{\pi}{4} - arctg\left(\frac{th \frac{\pi x}{\sqrt{2}}}{tg \frac{\pi x}{\sqrt{2}}}\right)$ **244.** $S = -\frac{\pi}{4} + arctg\left(\frac{sh \frac{\pi x}{\sqrt{2}}}{\sin \frac{\pi x}{\sqrt{2}}}\right)$.

ОТДѢЛЪ XII.

1. $2x - 1$.

2. $2x - 1 = \frac{29}{13 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 5}(x-2)(x-4)(x-5)(x-10)$.

3. $2 - \frac{x-1}{1} + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} + 9 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 28 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

4. $\Delta y_0 = 0{,}471$; $\Delta^2 y_0 = 0{,}054$ $\Delta^3 y_0 = +0{,}007$

5. $\Delta y_0 = 0{,}0292$ $\Delta^2 y_0 = 0{,}0565$; $\Delta^3 y_0 = 0{,}0012$, $\Delta^4 y_0 = 0{,}0048$.

6. $log\,1010 = 3{,}004321368 9$ $\Delta\,log\,1010 = 0{,}0064291891$
$\Delta^2\,log\,1010 = 0{,}0000001248993$, $\Delta^3\,log\,1010 = 0{,}000000000838850$;
$\Delta^4\,log\,1010 = 0{,}0000000000002585$. Въ искомомъ логариѳмѣ ошибка менѣе $\frac{7}{10^{11}}$

7. 3,002268462 8. 3,002268651.

9. Найдя, послѣ перваго приближенія $x = 1005{,}237$ и вычисливъ $\Delta\,log\,1005{,}237$ при $h = 0{,}001$, послѣ второго приближенія получаемъ $x = 1005{,}2374367$

10. Взявъ первое приближеніе по формулѣ $z = \frac{log\,x - log\,1005}{\Delta\,log\,1005} + \frac{z(z-1)\Delta^2 log\,1005}{2\Delta\,log\,1005}$, съ точностью до $\frac{1}{2 \cdot 10^3}$ получаемъ $x = 1005{,}237$.

11. 0,52373. 12. $u = 0{,}50145$.

13. 0,66048862 до $\frac{1}{2 \cdot 10^5}$. 14. 0,375147 до $\frac{1}{2 \cdot 10^6}$

15. $\varphi = 28^\circ 9' 57'',7$ 16. $\psi(0{,}715) = 0{,}220378903$ до $\frac{1}{10^9}$

17. $x = 0{,}314370$ до $\frac{1}{10^7}$ 18. 0,68797206 до $\frac{1}{2 \cdot 10^8}$

19. 0,935414 до $\frac{1}{2 \cdot 10^7}$ 20. 0,22037890 до $\frac{1}{2 \cdot 10^8}$

21. 0,83467 въ дѣйствительности 0,8356188.
22. 0,34636 » 0,3465736.
23. 0,16106 » 0,1612317
24. 0,69315 » 0,6931472.
25. 0,78540 » 0,785396
26. 0,83566 » 0,8356488.
27. 0,34657 » 0,34657359.
28. 0,16223 » 0,1612317
29. 0,141896 » 0,141896.
30. 0,60698 » 0,60698497.
31. 0,63631 » 0,636294
32. 0,24018 » 0,240227.
33. 0,88140 » 0,8813736.
34. 1,37079 » 1,37076.
35. 0,69314773 » 0,69314718.
36. 0,24433 » 0,243748.
37. 1,2288 » 1,22927.
38. 0,17260 » 0,17284.

39. 0,0099508309. **40.** 0,5235.
41. 0,84873 при $m = 3$ и 0,84893 при $m = 4$.
42. 0,075054. **43.** 0,67353.
44. 0,93090 въ дѣйствительности 0,9308740.
45. 0,69314716 » 0,69314718.
45. 0,24383 » 0,243748.
47. 0,82247 » 0,822467.
48. 0,84897. **49.** 1,21871.
50. 0,17281.
51. 1,2293 въ дѣйствительности 1,22927.
52. 1,3508 » 1,350644.
53. 0,67375.
54. 0,272198 въ дѣйствительности 0,27219826.
55. 2,17759 » 2,177586.
53. 156. **57.** $C = 0{,}57721566$.
58. 2,348. **59.** 14,3927267229.
90. $C = -1{,}460355$. **61.** $C = -0{,}073927$.

62. $s = \log 2\left(C - \frac{1}{2}\log 2\right) = 0{,}15987$; C — Эйлерова постоянная.

63. $\frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449341$. **64.** 0,105166.

65. $S = 1{,}20205690$. **06.** $S = 0{,}9375483$.

67. $S' = \frac{\pi^2}{12}\log 2 - \frac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n^2} = 0{,}1013166$.

68. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots = -C\,(\sqrt{2} - 1) = 0{,}60490$.

73. $u_n = \frac{1}{n}$; $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{2}u_{10} +$
$+ \frac{1}{4}\Delta u_{10} - \frac{1}{8}\Delta^2 u_{10} + \frac{1}{16}\Delta^3 u_{10} - \frac{1}{32}\Delta^4 u_{10} + \frac{1}{64}\Delta^5 u_{10} - \frac{1}{128}\Delta^6 u_{10} +$
$+ \frac{1}{256}\Delta^7 u_{10} - \frac{1}{512}\Delta^8 u_{10} + \frac{\theta}{512}\Delta^9 u_{10} = 0{,}69314718$.

74. $u_n = \frac{1}{2n-1}$; $\Delta^p u_n = (-1)^p \frac{2^p \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots p}{(2n-1)(2n+1)\ldots(2n+2p-1)}$; $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} +$
$+ \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{2}u_5 - \frac{1}{4}\Delta u_5 + \frac{1}{8}\Delta^2 u_5 - \frac{1}{16}\Delta^3 u_5 + \frac{1}{32}\Delta^4 u_5 - \frac{1}{64}\Delta^5 u_5 + \frac{\theta}{64}\Delta^6 u_5 = 0{,}78540$.

75. $u_n = \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n}{3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots 2n+1}$; $\Delta^p u_n = (-1)^p \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2p-1)}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2p+1)} u_n$;
$S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \frac{1}{2}u_5 - \frac{1}{4}\Delta u_5 + \frac{1}{8}\Delta^2 u_5 + \frac{1}{16}\Delta^3 u_5 + \frac{1}{32}\Delta^4 u_5 - \frac{1}{64}\Delta^5 u_5 +$
$+ \frac{\theta}{64}\Delta^6 u_5 = 0{,}37682$.

76. $u_n = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n}$; $\Delta^p u_n = (-1)^p \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2p-1)}{(2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2p)} u_n$;
$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} + R_4 = 0{,}70711$.
$R_4 = \frac{1}{2}u_4 - \frac{1}{4}\Delta u_4 + \frac{1}{8}\Delta^2 u_4 - \frac{1}{16}\Delta^3 u_4 + \frac{1}{32}\Delta^4 u_4 - \frac{1}{64}\Delta^5 u_4 + \frac{\theta}{64}\Delta^6 u_4$; $\frac{1}{2} < \theta < 1$.

77. $u = \frac{1}{(2n-1)^2}$;
$S = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{2}u_4 - \frac{1}{4}\Delta u_4 + \frac{1}{8}\Delta^2 u_4 - \frac{1}{16}\Delta^3 u_4 + \frac{1}{32}\Delta^4 u_4 - \frac{\theta}{32}\Delta^5 u_4 = 0{,}91596$.

78. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$;
$S = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}u_6 + \frac{1}{4}\Delta u_6 - \frac{1}{8}\Delta^2 u_6 + \frac{1}{16}\Delta^3 u_6 - \frac{1}{32}\Delta^4 u_6 +$
$+ \frac{\theta}{32}\Delta^5 u_6 = 0{,}6049$.

79. $u_n = \frac{1}{n^3}$;

$$S = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{2}u_5 - \frac{1}{4}\Delta u_5 + \frac{1}{8}\Delta^2 u_5 - \frac{1}{16}\Delta^3 u_5 + \frac{1}{32}\Delta^4 u_5 - \frac{9}{32}\Delta^5 u_5 = 0{,}90154.$$

80. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

$$S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \frac{1}{2}u_5 - \frac{1}{4}\Delta u_5 + \frac{1}{8}\Delta^2 u_5 - \frac{1}{16}\Delta^3 u_5 + \frac{1}{32}\Delta^4 u_5 - \frac{1}{64}\Delta^5 u_5 +$$
$$+ \frac{9}{64}\Delta^5 u_5 = 0{,}136294.$$

81. $u_n = \frac{1}{\log n}$;

$$S = \frac{1}{2}u_{10} - \frac{1}{4}\Delta u_{10} + \frac{1}{8}\Delta^2 u_{10} - \frac{1}{16}\Delta^3 u_{10} + \frac{9}{16}\Delta^4 u_{10} = 0{,}2218.$$

82. $P = n - \frac{1}{2} + \frac{1}{6n}$; $\lambda_n = 1 - \frac{1}{6n^3(n+1)}$.

83. $P_n = \frac{n-2}{5} + \frac{32}{35(2n+1)}$; $\lambda_n = 1 + \frac{432(n+1)}{35n^3(2n+1)(2n+3)}$; $\pi^2 = 9{,}8696044011$.

84. $P_n = n - 1 + \frac{1}{3(2n-1)}$; $\lambda_n = 1 + \frac{8}{3(2n-1)^3(2n+1)}$.

85. $P_n = 2n - \frac{2}{3} + \frac{14}{15(7n-1)}$; $\lambda_n = 1 + \frac{24}{5n^2(7n-1)(7n+6)}$.

86. $P_n = 2n + \frac{4n+1}{5(4n^2+2n+1)}$; $\lambda_n = 1 - \frac{18(4n+3)}{5(2n+1)^3(4n^2+2n+1)(4n^2+10n+7)}$;

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^3 + \ldots = 1{,}3932039.$$

87. $P_n = \frac{6n+1}{3} + \frac{28}{15(14n+5)}$; $\lambda_n = 1 + \frac{3\,.\,2^7}{5(2n+1)^2(14n+5)(14n+19)}$.

88. $P_n = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{4n}$; $\lambda_n = 1 + \frac{2n+1}{4n^4(n+1)}$; $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots = 1{,}20206$.

89. $P_n = n - \frac{1}{2} + \frac{4a^2+1}{6n}$; $\lambda_n = 1 + \frac{(4a^2+1)(a^2+1)}{6n(n+1)(n^2+a^2)}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4} = 0{,}6604$.

96. 1. $P_n = \frac{n}{n^2-n+1}$; $\lambda_n = 1 - \frac{2}{1+n^2+n^4}$;

2. $P_n = \frac{n^2+n+2}{n^3+2n-1}$; $\lambda_n = 1 + \frac{6}{(n^3+2n-1)(n^3+3n^2+5n+2)}$; $e = 2{,}7182818284$.

91. 1. $P_n = -\frac{2n-1}{4n}$; $\lambda_n = 1 - \frac{1}{4n^3(n+1)}$;

2. $P_n = -\frac{1}{2} + \frac{n}{2(2n^2+1)}$; $\lambda_n = 1 + \frac{3}{2n(2n^2+1)(2n^2+4n+3)}$.

92. $P_n = \frac{3-2n}{2(2n+1)}$; $\lambda_n = 1 - \frac{18(n+1)}{n^2(2n+1)(2n+3)}$; $\log 2 = 0{,}6931471806$.

93. 1. $P_n = \frac{1-n}{2n-1}$; $\lambda_n = 1 - \frac{2}{(2n-1)^2(2n+1)}$;

2. $P_n = -\frac{1}{2} + \frac{2n-1}{2(4n^2-4n+3)}$; $\lambda_n = 1 + \frac{12}{(2n-1)(16n^4+8n^2+9)}$.

94. 1. $P_n = \frac{7-2n}{2(2n-3)}$; $\lambda_n = 1 - \frac{12(2n+3)}{(2n-1)^2(2n-3)}$;

2. $P_n = \frac{2-n}{2n}$; $\lambda_n = 1 - \frac{9(2n+1)}{n(n+1)(2n-1)^2}$.

95. $P_n = \frac{3-2n}{2(2n-1)}$; $\lambda_n = 1 + \frac{16n}{(2n-1)^3(2n+1)}$.

96. $P_n = -\frac{1}{2} + \frac{2n+1}{(2n+1)^2+4}$; $\lambda_n = 1 + \frac{128n}{(2n-1)^2(4n^2-4n+5)(4n^2+4n+5)}$;

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots = 0{,}915966.$$

97. $P_n = -\frac{1}{2} + \frac{4n-3}{2(8n^2-12n+9)}$; $\lambda_n = 1 + \frac{27(4n-1)}{(2n-1)^2(8n^2-12n+9)(8n^2+4n+5)}$;
$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \ldots = 0{,}834627.$

98. $P_n = \frac{x\{(1-x)n+x\}}{(1-x)\{(1-x)n+x+2\}}$; $\lambda_n = 1 + \frac{6x}{(1-x)n\{(1-x)n+x+2\}\{(1-x)n+3\}}$;
$1 - 3\log\frac{4}{3} = 0{,}13695.$

99. $P_n = \frac{n(z-1)+1}{(z-1)^2n+z^2-1}$; $\lambda_n = 1 + \frac{2z^2}{n(z-1)\{(z-1)n+z+1\}\{(z-1)n+2z\}}$;
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n.n} = 0{,}2876821.$

100. $P_n = \frac{n+1}{n+3}$; $\lambda_n = 1 + \frac{8}{(n+3)(n+4)n}$.

101. 1. $P_n = \frac{2n+1}{2n+9}$; $\lambda_n = 1 + \frac{22+92n}{n^2(2n+9)(2n+11)}$;

2. $P_n = \frac{n}{n+4}$; $\lambda_n = 1 - \frac{2(n-5)}{n(n+4)(n+5)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n.n^2} = 0{,}58224.$

102. $P_n = \frac{2n-1}{2n^2-n+3}$; $\lambda_n = 1 - \frac{3(2n+5)}{(2n^2-n+3)(2n^2+3n+4)}$;
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(2n+1)} = 1{,}4626517.$

103. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx = 1{,}37076.$

104. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = 0{,}73414.$

105. $\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0{,}746823.$

106. $\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \ldots = 0{,}7834305.$

107. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}dx = 2\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots\right) = 1{,}831931.$

106. $\int_0^1 e^{x^2}dx = 1{,}4626517$; $P_n = \frac{2n-1}{2n^2-n+3}$;
$\lambda_n = 1 - \frac{3(2n+5)}{(2n^2-n+3)(2n^2+3n+4)}$.

109. $\int_0^1 e^{x^3}dx = 1{,}341904.$

110. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = 0{,}83565.$

111. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = 0{,}866579.$

112. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\log(x+1)} = 1{,}22927.$

113. $x_1 = 2{,}01167$; $x_2 = -1{,}54717$; $x_3 = 1{,}27552$.
114. $x_1 = 0{,}658231$; $x_2 = -0{,}371340$; $x_3 = 0{,}077156$;
$x_4 = \rho e^{i\varphi}$; $x_5 = \rho e^{-i\varphi}$; $\rho = 1{,}065955$; $\varphi = 99°49'55'',4$.

115. $x_1 = -1{,}327133$; $x_2 = 1{,}071936$; $x_3 = 0{,}18769 + 1{,}37350i$;
$x_4 = 0{,}18769 - 1{,}37350i$; $x_5 = -0{,}06009 + 0{,}94181i$; $x_6 = -0{,}06009 - 0{,}94181i$.

116. $x_1 = -1{,}960$; $x_2 = 1{,}538$; $x_3 = 1{,}109$;
$x_4 = 1{,}286\ (\cos 59°{,}95 + i \sin 59°{,}95)$; $x_5 = 1{,}286\ (\cos 59°{,}95 - i \sin 59°{,}95)$
$x_6 = 1{,}039\ (\cos 72°{,}87 + i \sin 72°{,}87)$; $x_7 = 1{,}039\ (\cos 72°{,}87 - i \sin 72°{,}87)$

117. $-1{,}001 \pm 2{,}003\, i$; $-1{,}000 \pm 2{,}000\, i$.

118. $\pm 0{,}91159$; $\pm 0{,}60102$; $\pm 0{,}52876$; $\pm 0{,}16790$.

119. 1,90647; 1,56877; $-1{,}47299$;
$-1{,}06534\ (\cos 61°54'33'' \pm i \sin 61°54'53'')$.

120. 3,5972850.

121. 0,73908512.

122. 4,49340964.

123. 2,56348423.

124. 4,73004099.

125. 1,87510402.

126. 1,4458.

127. 3,6705.